УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

Авторы:
С. М. Никольский, М. К. Потапов,
Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин

Условные обозначения в учебнике:

^{0} — наиболее легкие задания, предназначенные для устной работы;

* — задания повышенной трудности и пункты, предназначенные для изучения в классах с углубленным изучением математики;

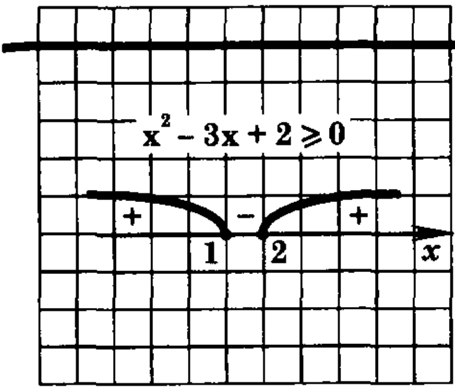
○ и ● — знаки, отмечающие начало и конец текста, необязательного при работе по обычной программе.

Алгебра: учеб. для 9 кл. общеобразоват. учреждений /
А45 [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин].— 3-е изд.— М. : Просвещение, АО «Московские учебники», 2006.— 255 с. : ил.— **ISBN 5-7853-0550-X**

Книга является продолжением учебников алгебры для 7—8 классов тех же авторов. Это учебник нового типа, который содержит материал как для общеобразовательных классов, так и для классов с углубленным изучением математики.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 5-7853-0550-X



ГЛАВА I

НЕРАВЕНСТВА

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

1.1. Неравенства первой степени с одиим неизвестным

Неравеиство вида

$$kx + b > 0 \tag{1}$$

или

$$kx + b < 0, \tag{2}$$

где k и b — данные числа, причем $k \neq 0$, называют иеравенством первой степени с одиим неизвестным x.

Число k называют **коэффициеитом** при неизвестном, а число b — **свободиым члеиом** неравенства.

Решением неравенства с одним нензвестным x называют такое число x_0, при подстановке которого в неравенство вместо x получается верное числовое неравенство.

Решить неравеиство — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Здесь и далее рассматриваются иеравенства с иеизвестным x, хотя вместо x можно писать любую букву: t, v, y, ...

Пример 1. Решнм неравенство

$$2x + 5 < 0. \tag{3}$$

Чтобы его решнть, можно рассуждать так.

Пусть некоторое число x_0 есть решеиие иеравенства (3). Подставнм его вместо x в неравенство (3). Получим верное числовое неравенство

$$2x_0 + 5 < 0. \tag{4}$$

Прибавляя к обеим частям этого нераveиства число -5, получим верное числовое неравенство

$$2x_0 < -5. \tag{5}$$

Деля это неравенство на положительное число 2, получим верное числовое неравенство

$$x_0 < -\frac{5}{2}. \qquad (6)$$

Обратно: пусть некоторое число x_0 удовлетворяет неравенству (6). Умножив это неравенство на положительное число 2, получим верное числовое неравенство (5). Прибавляя далее к обеим частям неравенства (5) число 5, получим верное числовое неравенство (4), т. е. получим, что x_0 удовлетворяет неравенству (3).

Итак, множество всех решений неравенства (3) есть множество всех чисел, удовлетворяющих неравенству $x < -\frac{5}{2}$. Можно еще сказать, что все решения неравенства (3) образуют интервал $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$, или множеством всех решений неравенства (3) является интервал $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$.

Аналогичные рассуждения можно провести и при решении любых неравенств первой степени (1) и (2). Из этих рассуждений вытекает следующий способ решения неравенств первой степени с одним неизвестным:

перенести свободный член этого неравенства в правую часть (изменив знак числа b на противоположный);

разделить обе части полученного неравенства на коэффициент при неизвестном (при этом если $k > 0$, то знак неравенства не изменяется; если $k < 0$, то знак неравенства изменяется на противоположный).

Полученное неравенство и дает ответ.

Пример 2. Решим неравенство

$$-4x + 13 < 0. \qquad (7)$$

Перенеся свободный член в правую часть, получим неравенство

$$-4x < -13.$$

Разделив обе части этого неравенства на отрицательное число -4, получим неравенство

$$x > \frac{13}{4}$$

(обратите внимание на изменение знака неравенства). Таким образом, множество всех решений неравенства (7) образует интервал $\left(\frac{13}{4}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(\frac{13}{4}; +\infty\right)$.

1. Изобразите на коордииатиой оси интервал:
а) $(-2; 7)$; б) $(-17; 34)$; в) $(1234; 1398)$;
г) $(-\infty; 0)$; д) $(0; +\infty)$; е) $(-\infty; -3)$;
ж) $(2; +\infty)$; з) $(-\infty; +\infty)$; и) $\left(\frac{1}{3}; 0{,}5\right)$.

2. Указаиные иа рисуике 1 иитервалы запишите с помощью знаков неравенств.

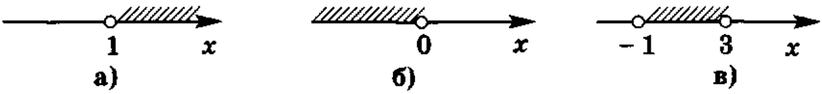


Рис. 1

3. На координатиой оси изобразите все числа, удовлетворяющие неравенству:
а) $x > 0$; б) $x < 3$; в) $x > 3579$;
г) $x < -2$; д) $x > -1748$; е) $x < 0{,}00000006$;
ж) $x > \sqrt{5}$; з) $x < \pi$; и) $0 < x < \sqrt{2}$;
к) $-2 < x < -0{,}5$; л) $|x| < 1$; м) $|x - 1| > 1$.

4. Какой знак ($=$, $\neq$, $<$, $>$) следует поставить между a и b, если разность $a - b$:
а) положительное число; б) отрицательное число;
в) натуральиое число; г) ие равна нулю;
д) равна нулю?

5. Какое чнсло больше:
а) a или $a + 3$; б) $b + 1$ или $b + 2$;
в) $a - 5$ нли $a + 2$; г) $b - 7$ или $b - 6$?
Здесь a н b — любые данные числа.

6°. Можно ли указать:
а) наименьшее решеиие неравенства $x > 0$;
б) наибольшее решеиие нераведства $x < -2$;
в) иаименьшее целое решение неравенства $x > -5$;
г) наибольшее целое решение неравенства $x < 1$?

7. Сравиите с нулем разность $x - a$, если:
а) $x > a$; б) $x < a$.

8. Запишите какое-нибудь неравенство первой степени с одним неизвестным. Назовите коэффициент при неизвестном и свободный члеи этого неравенства.

9°. а) Что называют решением неравенства с одним нензвестным?
б) Что значит решить нераведство с одним иеизвестным?

10. Является ли число 3 решением неравенства:
а) $x > 0$; б) $x > -2$; в) $x < \pi$;
г) $-3 < x < 3$; д) $x < \sqrt{10}$; е) $\sqrt{8{,}7} < x < \sqrt{9{,}1}$?

Решите неравенство (11–25):

11. а) $x - 1 > 0$; б) $x + 5 < 0$; в) $x - 0{,}5 < 0$;
г) $3 + x > 0$; д) $7 + x > 0$; е) $x - 1\frac{1}{3} < 0$.

12. а) $x + 4 > 7$; б) $x - 11 < -7$; в) $x + 7 > 7$;
г) $x - 6 < 6$; д) $4 + x > 2$; е) $3 + x < -6$.

13. а) $x - 2 > 0{,}2$; б) $x - 3{,}5 < 4$; в) $2{,}1 + x < 7$;
г) $x - 2 > -0{,}6$; д) $x + 10{,}7 > 7{,}9$; е) $5{,}013 + x < 0{,}13$.

14. а) $x - 1783 < -\frac{1}{3}$; б) $x + \frac{1}{5} < 199$; в) $\frac{5}{7} + x > 2\frac{1}{2}$;
г) $x - 2\frac{1}{2} < -1\frac{3}{5}$; д) $x + \frac{37}{90} < \frac{11}{18}$; е) $\frac{13}{48} + x > 7\frac{15}{16}$.

15. а) $x - 3{,}6 > 2\frac{1}{3}$; б) $7{,}4 + x > 7\frac{2}{5}$; в) $x - 12\frac{1}{4} < 15{,}3$.

16. а) $2x > 4$; б) $7x < -14$; в) $-5x < 100$;
г) $-3x < 9$; д) $-2x > -2$; е) $-3x > -6$.

17. а) $3x < 2$; б) $-2x < 11$; в) $-4x > -2$;
г) $-5x > 1$; д) $-17x > -2$; е) $13x < 3$.

18. а) $2x > 0$; б) $-2x < 0$; в) $-x < 2$;
г) $-x < 0$; д) $-x > -2$; е) $-x > 1$.

19. а) $\frac{1}{2}x < 3$; б) $\frac{3}{4}x < 1$; в) $-\frac{1}{3}x > -1$;
г) $\frac{1}{5}x > 0$; д) $2x > \frac{2}{3}$; е) $-4x < \frac{8}{11}$.

20. а) $\frac{2}{3}x < \frac{5}{6}$; б) $-\frac{4}{7}x > \frac{8}{7}$; в) $-2x < 1\frac{1}{3}$;
г) $2\frac{1}{5}x > 3$; д) $1\frac{1}{2}x > -2\frac{1}{2}$; е) $-3\frac{2}{7}x < -3\frac{1}{7}$.

21. а) $0{,}2x > 3$; б) $3x > 1{,}8$; в) $-0{,}001x < 1$.

22. а) $0{,}2x > \frac{2}{5}$; б) $1{,}5x < \frac{9}{10}$; в) $-1{,}1x < 4\frac{2}{5}$;
г) $\frac{x}{2} > 3$; д) $\frac{x}{4} > \frac{7}{12}$; е) $-\frac{2x}{3} < -8$.

23. а) $2x - 4 > 0$; б) $3x - 1 < 0$; в) $-2x - 4 > 0$;
г) $7x + 4 < 0$; д) $4x + 3 > 0$; е) $-4x + 3 < 0$.

24. а) $1 + \frac{2}{9}x < 0$; б) $\frac{4}{5} - 3x < 0$; в) $1\frac{1}{7} - \frac{4}{7}x > 0$;
г) $4\frac{1}{3} - 8\frac{2}{3}x > 0$; д) $2\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{2} < 0$; е) $\frac{5}{7}x - \frac{5}{7} > 0$.

25. а) $0{,}003x - 20 < 0$; б) $4x + 0{,}0001 > 0$;
в) $1{,}35 - 27x > 0$; г) $0{,}15 - 150x < 0$;
д) $-0{,}3x - 13 > 0$; е) $-0{,}17x - 51 < 0$.

1.2. Применение графиков к решению неравенств первой степени с одним неизвестным

Покажем, как можно, используя график линейной фуикции, решать неравенства вида

$$kx + b > 0 \qquad (1)$$

или

$$kx + b < 0, \qquad (2)$$

где k и b — данные числа и $k \neq 0$.

В декартовой системе координат xOy рассмотрим прямую

$$y = kx + b. \qquad (3)$$

На рисуике 2,*а* изображена такая прямая при $k > 0$, а иа рисунке 2,*б* — при $k < 0$.

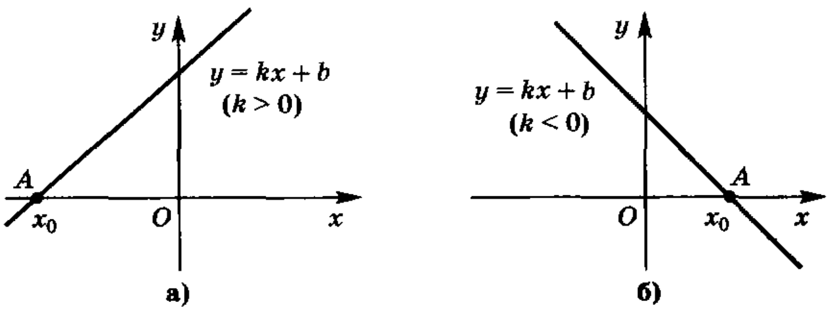


Рис. 2

Решить неравенство (1) — это значит иайти все зиачения x, для каждого из которых соответствующая точка прямой $y = kx + b$ расположена выше оси Ox.

Пусть точка A — точка пересечеиия прямой (3) с осью Ox. Абсциссу точки A обозиачим через x_0. Так как ее ордината равна нулю, то x_0 удовлетворяет уравиеиию $0 = kx_0 + b$, откуда

$$x_0 = -\frac{b}{k}.$$

Обратимся к рисунку 2,*а*, соответствующему случаю $k > 0$. Мы видим, что точки прямой $y = kx + b$ расположены выше оси Ox для всех x, иаходящихся правее точки x_0, т. е. для всех x из иитервала $(x_0; +\infty)$.

Итак, при $k > 0$ множество решеиий неравенства (1) образует интервал $(x_0; +\infty)$, а множество решений иеравеиства (2) образует интервал $(-\infty; x_0)$.

При $k < 0$ (рис. 2,*б*), иаоборот, множество решений неравенства (1) образует интервал $(-\infty; x_0)$, а миожество решений иеравенства (2) образует иитервал $(x_0; +\infty)$.

Пример 1. Используя график линейной функции, решим неравенства

$$2x + 1 > 0 \tag{4}$$

и

$$2x + 1 < 0. \tag{5}$$

Рассмотрим в декартовой системе координат xOy прямую

$$y = 2x + 1. \tag{6}$$

Для этого нужно знать две ее точки. В качестве первой точки возьмем точку пересечения нашей прямой с осью Ox. Полагая в формуле (6) $y = 0$, получим уравнение $0 = 2x + 1$. Его решение $x_0 = -\frac{1}{2}$ — есть абсцисса точки A — точки пересечения прямой с осью Ox. Итак, $A\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$.

В качестве второй точки можно взять точку B пересечения нашей прямой с осью Oy. Ее абсцисса $x = 0$, а ордината $y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$. Итак, $B\ (0;\ 1)$.

Через точки A и B проводим прямую. Это и есть прямая $y = 2x + 1$ (рис. 3). Из рисунка 3 видно, что множество решений неравенства (4) образует интервал $\left(-\frac{1}{2};\ +\infty\right)$, а множество решений неравенства (5) образует интервал $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

Пример 2. Решим неравенство

$$kx + b > 0, \tag{7}$$

если известно, что прямая $y = kx + b$ пересекает ось Ox в точке $A\ (3;\ 0)$ и ее угловой коэффициент положителен.

Учитывая, что угловой коэффициент прямой $y = kx + b$ положителен и прямая пересекает ось Ox в точке $A\ (3;\ 0)$, можно показать схематически, как расположена прямая в координатной плоскости (рис. 4). Из этого рисунка видно, что множество всех решений неравенства (7) есть интервал $(3;\ +\infty)$.

Ответ: $(3;\ +\infty)$.

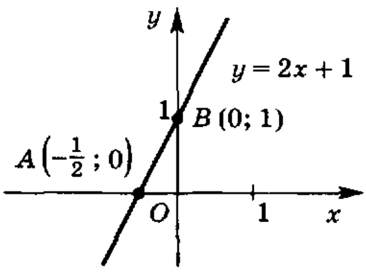


Рис. 3

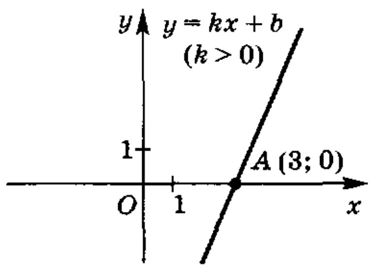


Рис. 4

26^0. Как можно решить неравенство первой степени с одним неизвестным, используя график линейной функции?

27. Постройте график функции:

а) $y = x - 4$; б) $y = 2x + 2$; в) $y = -3x - 3$;
г) $y = 5x - 6$; д) $y = -0{,}5x + 1{,}5$; е) $y = 1\frac{1}{2}x - 0{,}3$.

С помощью графика определите интервал, на котором функция принимает положительные значения; отрицательные значения.

28. Запишите интервал, на котором функция, график которой изображен на рисунке 5, принимает положительные значения; отрицательные значения.

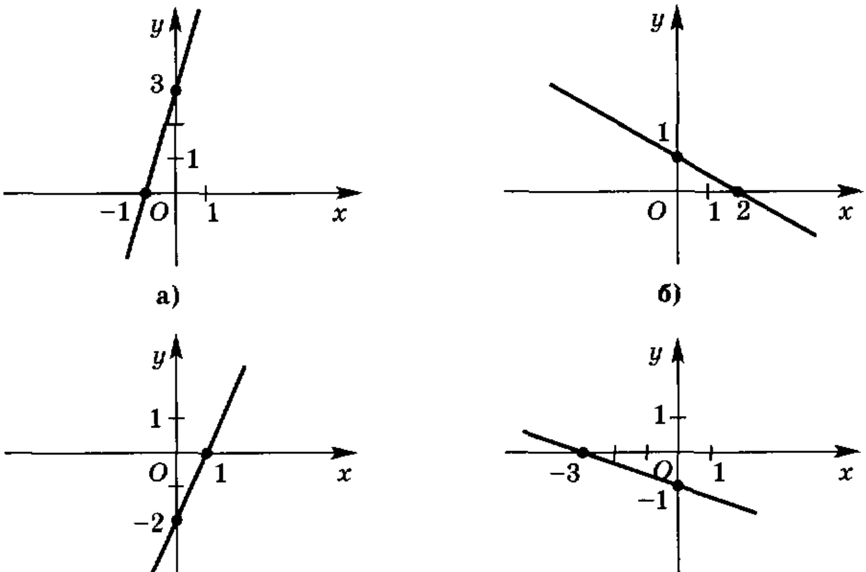


Рис. 5

29. Решите неравенство, используя график:

а) $x + 2 > 0$; б) $-x + 2 > 0$; в) $2x - 1 < 0$;
г) $-2x - 1 < 0$; д) $0{,}2x + 1 > 0$; е) $-\frac{1}{3}x + 5 < 0$;
ж) $400x + 100 > 0$; з) $200x - 500 > 0$; и) $0{,}01x - 0{,}05 < 0$.

1.3. Линейные неравенства с одним неизвестным

Неравенство, левая и правая части которого есть многочлены первой степени относительно x или числа, называют линейным неравенством с одним неизвестным x.

Следующие неравенства могут служить примерами линейных неравенств с одним неизвестным x:

$$2x + 7 < x - 5, \qquad 0x - 3 < 0,$$
$$7 < 2x + 9, \qquad \frac{2}{3}x + 0{,}7 > 2\frac{1}{3}x + 5,$$
$$2x + 7 > 2x + 5, \qquad 3x + 2 + x > x - 1 + x,$$
$$0x + 2 > 0, \qquad 3x + 2 < 0.$$

Ясно, что любое неравенство первой степени есть частный случай линейного неравенства.

Члены многочленов в левой и правой частях линейного неравенства называют **членами этого неравенства**.

Число x_0 называют **решением линейного неравенства с неизвестным** x, если при подстановке его вместо x получается верное числовое неравенство.

Два неравенства с одним неизвестным x называют **равносильными**, если любое решение первого неравенства является решением второго и, наоборот, любое решение второго является решением первого. Любые неравенства, не имеющие решений, считаются равносильными.

При решении неравенств пользуются утверждениями:

1) Члены неравенства можно переносить с противоположными знаками из одной части неравенства в другую.

Иначе говоря, если какой-нибудь член неравенства перенести с противоположным знаком из одной части неравенства в другую, то получится неравенство, равносильное исходному. Например, равносильны неравенства

$$2x - 7 < 0 \quad \text{и} \quad 2x < 7,$$
$$3x + 5 > 2x - 9 \quad \text{и} \quad 3x - 2x + 5 > -9.$$

2) В неравенстве можно приводить подобные члены.

Иначе говоря, если в левой или правой частях неравенства привести подобные члены, то получится неравенство, равносильное исходному. Например, равносильны неравенства

$$3x - 4\frac{1}{2} + 5x - \frac{1}{2} > 0 \quad \text{и} \quad 8x - 5 > 0,$$
$$2x + 3 - 1 < x - 2x + 2 \quad \text{и} \quad 2x + 2 < -x + 2.$$

3) При умножении (или делении) неравенства на положительное число знак неравенства сохраняется.

Иначе говоря, если обе части неравенства умножить (или разделить) на положительное число и сохранить знак неравенства, то получим неравенство, равносильное исходному. Например, равносильны неравенства

$$\frac{1}{4}x > 2 \quad \text{и} \quad x > 8,$$

$$3x + 5 < 0 \quad \text{и} \quad x + \frac{5}{3} < 0.$$

4) При умножении (или делении) неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный.

Иначе говоря, если обе части неравенства умножить (или разделить) на отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное исходному. Например, равносильны неравенства

$$7x - 3 > 0 \quad \text{и} \quad 3 - 7x < 0,$$
$$5x + 4 < -3x + 2 \quad \text{и} \quad -5x - 4 > 3x - 2.$$

Пример 1. Решим неравенство

$$4x - 7 < -2x + 5. \tag{1}$$

Перенеся все члены неравенства (1) в левую часть, получим неравенство

$$4x - 7 + 2x - 5 < 0,$$

равносильное неравенству (1). Приведя подобные члены в левой части полученного неравенства, получим неравенство первой степени с одним неизвестным

$$6x - 12 < 0,$$

равносильное неравенству (1). Все его решения образуют интервал $(-\infty; 2)$. Следовательно, множество всех решений неравенства (1) образует интервал $(-\infty; 2)$.

Ответ: $(-\infty; 2)$.

Пример 2. Решим неравенство

$$7x + 5 < 7x - 1. \tag{2}$$

Перенеся все члены неравенства (2) в левую часть, получим неравенство

$$7x + 5 - 7x + 1 < 0, \tag{3}$$

равносильное неравенству (2). Приведя подобные члены в левой части неравенства (3), имеем

$$0 \cdot x + 6 < 0. \tag{4}$$

Очевидно, что нет ни одного числового значения x, которое удовлетворяло бы неравенству (4). Следовательно, неравенство (4) и равносильное ему неравенство (2) не имеют решений.

Ответ: нет решений.

Пример 3. Решим неравенство

$$9x - 5 > 9x - 6. \tag{5}$$

Перенеся все члены неравенства (5) в левую часть, получим неравенство

$$9x - 5 - 9x + 6 > 0, \tag{6}$$

равносильное неравенству (5). Приведя подобные члены в левой части неравенства (6), имеем

$$0 \cdot x + 1 > 0.$$

Получнлось неравенство, справедливое для любых значений x, это означает, что решеннем неравенства (5) является любое действительное число, т. е. множество всех решений неравенства (5) образует нитервал $(-\infty;\ +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ +\infty)$.

30°. а) Какое неравенство называют линейным неравенством с одним неизвестным?

б) Что называют членами лннейного неравенства?

в) Какие неравенства называют равносильными?

г) Сформулируйте утверждеиия о равносильности неравенств.

31. Приведите неравенство к виду $kx+b>0$ илн $kx+b<0$:

а) $3x-2>7x+5$; б) $4-6x<9-x$;

в) $7>0{,}2x$; г) $8-2(3-2x)<1$.

32. Является ли чнсло, указанное в скобках, решением неравенства:

а) $4x-4>3x+3$ (-1); б) $2+12x<-x+3$ (-2);

в) $5x-7>9+x$ (100); г) $72x-18<-13x$ (-10)?

33. Являются ли равносильными неравенства:

а) $2x-1>6$ и $6>2x-1$; б) $x<3$ и $x+2<5$;

в) $2x>4$ и $x<2$; г) $2x>5$ и $x-7>-2-x$;

д) $2<7-x$ н $3x<5+2x$; е) $3x-7>5$ н $-3x+7<-5$?

Решите неравенство (**34—44**):

34. а) $x+4>5x$; б) $x-2<3x$;

в) $2x+1<x$; г) $7x-13>9x$.

35. а) $2x-x-1<2$; б) $3<7x-5-4x$;

в) $5x-2x-8x+x-12x>7-2x$;

г) $8-9x>x-3-3x+4x+15$.

36. а) $x-2<x$; б) $x+5>x$;

в) $6-3x>1-3x$; г) $12+4x<3-x+5x$.

37. а) $x+2<x$; б) $x-5>x$;

в) $4-8x<-8x+4$; г) $x-3+2x<4+3x-1$.

38. а) $\frac{1}{4}x-\frac{1}{6}x+5>\frac{1}{3}x-1$;

б) $\frac{1}{2}x-3<2-\frac{1}{3}x$;

в) $1-\frac{3}{7}x-5<6-\frac{1}{3}x-\frac{2}{21}x$;

г) $2x-\frac{3}{5}x>1\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}x+2$;

д) $\frac{2}{5}x - 1 < \frac{3}{4}x - \frac{13}{20}$;

е) $3 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x < 14 + \frac{1}{12}x$.

39. а) $1{,}2 - 2{,}6x - 5 > 3{,}2x - 3$;
б) $x - 1{,}2 < 0{,}3x + 3{,}7$;
в) $7 - 0{,}2x < 21{,}28 - 1{,}6x$;
г) $0{,}8x + 0{,}12 - 0{,}3x > 76{,}2 - 0{,}1x + 0{,}6x$;
д) $1{,}52 - 2{,}8x < 1{,}72 - 5{,}2x$;
е) $0{,}014 - 12{,}5x > 1{,}25 - 0{,}5x + 1{,}086 - 12x$.

40. а) $2x + (3x - 1) > 4$; б) $x - 16 < (5 - 2x) - x - 1$;
в) $2x - (x - 1) < 3$; г) $(2x - 3) - (x + 1) > 1$.

41. а) $(x + 1) - (2x + 3) - (1 - 7x) < x - (8 - 5x)$;
б) $(3x - 11) - (5 - 9x) + (x - 1) > 1 - 4x - (12 + x)$.

42. а) $2(x - 1) < 4$; б) $3(2x - 1) > 12$;
в) $4(1 + x) < 8 - 4x$; г) $25 - 10x > -5(2x - 7)$.

43. а) $x(2 - x) < (3 - x)(3 + x)$;
б) $3(x - 1)(x + 1) > 3(1 + x^2)$;
в) $(x - 2)(x - 3) + (4 - x)(x + 2) > 0$;
г) $(2x - 1)(x + 2) - (x - 5)(2x + 1) > 0$.

44. а) $\frac{x-1}{3} < 1$; б) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} > 2$;
в) $\frac{2x}{3} < \frac{x}{4} - 1$; г) $\frac{3x}{2} + \frac{x}{6} - \frac{2x}{3} > 8$;
д) $\frac{x-4}{5} > 2 - \frac{x}{3}$; е) $\frac{2x+1}{4} + 2 < \frac{3x+2}{3}$;
ж) $\frac{x-1}{2} - \frac{x}{4} < \frac{x}{6} + \frac{x-2}{3}$; з) $\frac{7x-2}{4} > 1 - \frac{x-1}{3} + 2\frac{1}{12}x$.

45°. Может ли неравенство первой степени с одним неизвестным:
а) быть верным при любом значении неизвестного;
б) ие нметь решений?

46°. Может ли линейное иеравенство с однм иензвестным:
а) быть верным прн любом значенин неизвестного;
б) не нметь решений?

1.4. Системы линейных неравенств с однм неизвестным

Если требуется иайти все числа x, каждое из которых есть решение одновременно нескольких данных линейных неравенств с одним неизвестным x, то говорят, что надо решить *систему линейных неравенств с одним неизвестным x*.

Для того чтобы решнть систему лннейных неравенств, надо решить каждое неравенство этой системы, а затем найтн общую часть (пересеченне) полученных множеств решений — она н будет множеством всех решений данной системы.

Обычно неравенства системы записывают в столбик одно под другим и объединяют их слева фигурной скобкой.

Рассмотрим примеры решения систем линейных неравенств.

Пример 1. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 2x+3>0, \\ -4x+5<0. \end{cases} \qquad (1)$$

Решив первое неравенство системы (1), получим, что множество всех его решений составляет интервал $\left(-\frac{3}{2};\ +\infty\right)$. Решив второе неравенство системы (1), получим, что множество всех его решений составляет интервал $\left(\frac{5}{4};\ +\infty\right)$. Теперь найдем те значения x, для которых одновременно превращаются в верные числовые неравенства оба неравенства системы (1), т. е. найдем общую часть интервалов $\left(-\frac{3}{2};\ +\infty\right)$ и $\left(\frac{5}{4};\ +\infty\right)$. Для этого отметим на координатной оси Ox оба интервала. Из рисунка 6 видно, что общая часть этих интервалов есть интервал $\left(\frac{5}{4};\ +\infty\right)$.

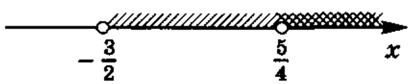


Рис. 6

Следовательно, множество всех решений системы неравенств (1) образует интервал $\left(\frac{5}{4};\ +\infty\right)$.

О т в е т: $\left(\frac{5}{4};\ +\infty\right)$.

Пример 2. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 5x-23<0, \\ 12x-13>0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решив каждое неравенство системы (2), найдем, что множеством всех решений первого неравенства являются все x, меньшие $\frac{23}{5}$ $\left(x<\frac{23}{5}\right)$, а множеством всех решений второго — все x, большие $\frac{13}{12}$ $\left(x>\frac{13}{12}\right)$.

Множеством всех решений системы (2) будет множество всех тех x, для каждого из которых одновременно превращаются в верные числовые неравенства оба неравенства системы (2). Следовательно,

Рис. 7

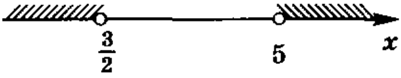


Рис. 8

это будут те x, которые больше чем $\frac{13}{12}$, но меньше чем $\frac{23}{5}$, т. е. все x из интервала $\frac{13}{12} < x < \frac{23}{5}$ (рис. 7).

Итак, множество всех решений системы (2) образует интервал $\left(\frac{13}{12}; \frac{23}{5}\right)$.

О т в е т: $\left(\frac{13}{12}; \frac{23}{5}\right)$.

Пример 3. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} x - 5 > 0, \\ 2x - 3 < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Решениями первого неравенства системы (3) являются все $x > 5$, а решениями второго — все $x < \frac{3}{2}$.

Решениями системы (3) могут быть только те x, которые больше чем 5, но меньше чем $\frac{3}{2}$. Ясно, что таких x не существует (рис. 8). Следовательно, система (3) не имеет решений.

О т в е т: нет решений.

Систему неравенств иногда можно записать в виде двойного неравенства. Например, систему неравенств

$$\begin{cases} 2x - 5 > 0, \\ 2x - 5 < 7 \end{cases} \tag{4}$$

можно записать в виде двойного неравенства

$$0 < 2x - 5 < 7. \tag{5}$$

Поэтому двойное неравенство можно решать двумя способами.

I с п о с о б. Запишем двойное неравенство (5) в виде системы неравенств (4) и решим эту систему:

$$\begin{cases} 2x - 5 > 0, \\ 2x - 5 < 7; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x > 5, \\ 2x < 7 + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2{,}5, \\ x < 6, \end{cases}$$

т. е. $2{,}5 < x < 6$.

II с п о с о б. Решаем двойное неравенство (5):

$$5 < 2x < 7 + 5,$$
$$2{,}5 < x < 6.$$

Следовательно, решения двойного неравенства (5) образуют интервал (2,5; 6).

Ответ: (2,5; 6).

Заметим, что на самом деле второй способ решения двойного неравенства есть краткая запись первого способа.

47°. Что значит решить систему линейных неравенств с одним неизвестным?

48. Найдите хотя бы одно общее решение неравенств:

а) $x > 3$ и $x > 2$; б) $x < -2$ и $x < -1$;
в) $x + 1 > 0$ и $x - 1 > 0$; г) $x - 2 < 0$ и $x + 2 < 0$;
д) $2x > -4$ и $x + 2 < 0$; е) $3x < 9$ и $x + 3 > 0$.

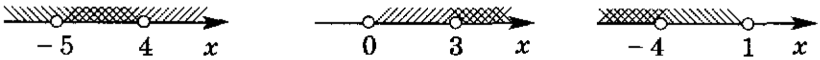
Отметьте на координатной оси все решения системы неравенств, если они существуют (**49—51**):

49. а) $\begin{cases} x > 3, \\ x > 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x > -2, \\ x > 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x > 0, \\ x > 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x > -3, \\ x > -5. \end{cases}$

50. а) $\begin{cases} x < 7, \\ x < 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x < -1, \\ x < 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x < -5, \\ x < 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x < -10, \\ x < -16. \end{cases}$

51. а) $\begin{cases} x > 1, \\ x < -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x < -5, \\ x > -7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x > 4, \\ x < 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x < 0, \\ x > -5. \end{cases}$

52. Запишите какую-либо систему неравенств, все решения которой образуют интервал, отмеченный на рисунке 9 двойной штриховкой.



а) **б)** **в)**

Рис. 9

53. Является ли решением системы неравенств число, указанное в скобках:

а) $\begin{cases} 2x + 3 > 0, \\ 7 - 4x > 0 \end{cases} (-1)$; б) $\begin{cases} 5x > 10, \\ 6x + 1 < 0 \end{cases} (3)$;

в) $\begin{cases} 8 - x < 0, \\ 3x > 3 \end{cases} (\sqrt{2})$; г) $\begin{cases} 7x - 10 < 0, \\ 3x + 1 > 0 \end{cases} (\sqrt{0,6})$?

54. Для неравенства $2x < 1$ подберите другое неравенство так, чтобы система этих неравенств:

а) не имела решений;

б) имела множеством всех решений интервал $(-\infty; 0,5)$.

Решите систему неравенств **(55—56)**:

55. а) $\begin{cases} 3 > x, \\ x < 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x > 1, \\ -7 < x + 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6x > 6, \\ 1 > 3 - 2x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6 - 2x > 5, \\ 3 - 2x > 1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x - 4 > 0, \\ 2x - 8 > 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 5x + 3 < 8, \\ 7 - 3x > 2; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x - 1 > 3x + 1, \\ 5x - 1 > 13; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 7x < x - 6, \\ 2 > 5 + 3x. \end{cases}$

56. а) $\begin{cases} 2x + 7 > 3 - x, \\ \frac{1}{3}x - 1 > 2x - \frac{1}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2}{3}x > 8, \\ \frac{3}{4}x - 1 > \frac{3}{5}x - 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} < 1, \\ 4 - x > \frac{x-5}{3}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{2x+1}{3} > \frac{3-x}{2}, \\ \frac{x}{7} - 1 < \frac{2-8x}{4}. \end{cases}$

57. а) Найдите все x, для каждого из которых значение функции $y = 2x - 3$ больше значения функции $y = -x + 4$.
б) Найдите все x, для каждого из которых значение функции $y = 1 - x$ больше значения функции $y = 0{,}5x + 5$.

58. а) Найдите все x, для каждого из которых функции $y = 3x$ и $y = 1 - x$ одновременно принимают отрицательные значения.
б) Найдите все x, для каждого из которых функции $y = 0{,}4x + 1$ и $y = -2x + 3$ одновременно принимают положительные значения.
в) Найдите все значения x, для каждого из которых значения функции $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$ меньше значений функций $y = x$ и $y = -2x + 3$.
г) Найдите все значения x, для каждого из которых значения функции $y = x + 4$ больше значений функций $y = -x$ и $y = 2x + 3$.

59. Даны функции $y = 5x - 8$ и $y = -5x + 8$. Определите интервал оси Ox, на котором:
а) обе функции положительны;
б) обе функции отрицательны;
в) функция $y = 5x - 8$ больше нуля, а функция $y = -5x + 8$ меньше нуля;
г) значения функции $y = 5x - 8$ больше соответствующих значений функции $y = -5x + 8$.

60. На рисунке 10 приведены графики линейных функций, обозначенных y_1 и y_2. Определите все значения x, при которых:

а) $y_1 > y_2$; б) $y_1 < y_2$.

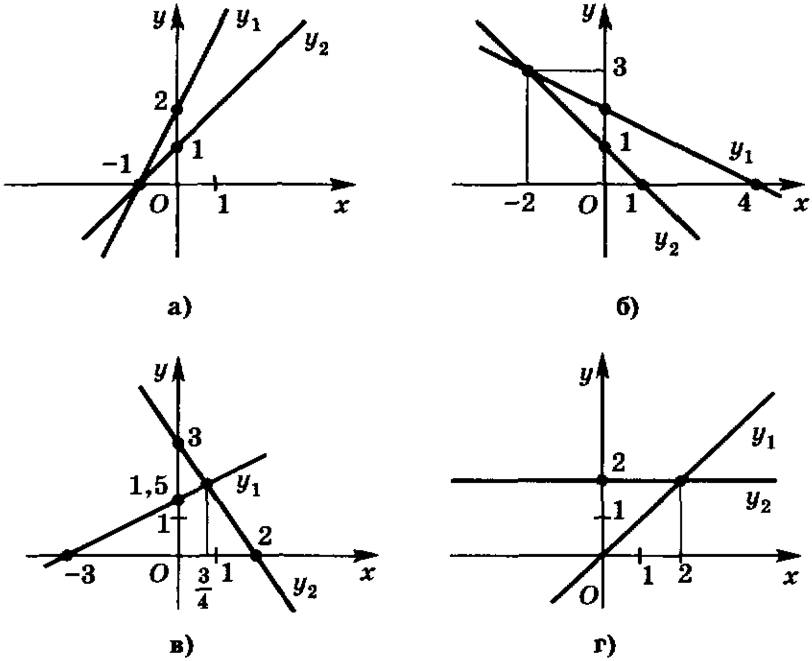


Рис. 10

61. Решите систему неравенств, используя графики функций:

а) $\begin{cases} 3x < 0, \\ x + 2 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -5x < 0, \\ 3 - x < 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x + 2 > 0, \\ x + 1 < 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - 6 > 0, \\ 2x - 4 < 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x + 4 > 0, \\ x + 3 < 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x + 4 < 0, \\ x + 3 > 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 0{,}5x + 3 > 0, \\ x + 2 > 0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 0{,}5x + 3 < 0, \\ x + 2 < 0. \end{cases}$

62. Решите двойное неравенство двумя способами:

а) $0 < 3x < 2$; б) $-1 < \frac{2}{7}x < 8$;

в) $1 < x + 4 < 2$; г) $-7 < x - 6 < -2$;

д) $0 < 3x - 7 < 3$; е) $-8 < 0{,}5x + 1 < -4$.

§ 2. НЕРАВЕНСТВА ВТОРОЙ СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

2.1. Понятие неравенства второй степени с одним неизвестным

Неравенство вида

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (1)$$

или

$$ax^2 + bx + c < 0, \qquad (2)$$

где a, b и c — данные числа, причем $a \neq 0$, называют неравенством второй степени с одим неизвестным x.

Число a называют **коэффициентом при x^2**, число b — **коэффициентом при x.** Выражения ax^2, bx и c называют **членами неравенств** (1) и (2), число c — **свободным членом.**

Дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ называют также *дискриминантом неравенств* (1) и (2).

Примерами неравенств второй степени с одним иеизвестным x могут служить иеравенства

$$3x^2 - 4x + 5 > 0, \qquad -x^2 - 1 > 0,$$
$$-6x^2 - 2x + 1 < 0, \qquad -2x^2 < 0.$$

Напомним, что решением иеравенства с одим неизвестным x иазывают такое число x_0, при подстановке которого в неравенство вместо x получается верное числовое неравенство; *решить неравенство* — значит найти все его решеиия или доказать, что их нет. При решеиии иеравенств второй степени будут использоваться утверждения о равносильности неравенств, прнведеиные в предыдущем параграфе, где эти утверждения иллюстрировались иа примере лннейных иеравеиств. На самом деле оии верны и для многих других иеравенств, в частности для иеравеиств второй степеии.

Заметим, что если a — отрицательиое число, то, умножив неравенство (1) иа -1, получнм на основании утверждения 4 п. 1.3 равносильное ему неравенство

$$(-a)x^2 + (-b)x + (-c) < 0$$

уже с положительным коэффициентом при x^2.

Аналогичио если a — отрицательное число, то, умиожив неравеиство (2) иа -1, получим на основанин утверждения 4 п. 1.3 равиосильиое ему неравеиство

$$(-a)x^2 + (-b)x + (-c) > 0$$

также с положительным коэффициентом при x^2.

Учитывая это, дальше будем рассматривать решеиия неравенств (1) и (2), считая, что a — положительное число. В следующих пунктах будет рассмотрено решение этих неравенств отдельно при условнях $D > 0$; $D = 0$; $D < 0$.

63°. а) Какой вид имеет неравенство второй степенн с одним неизвестиым x?

б) Что называют дискриминаитом неравенства второй степеии $ax^2 + bx + c > 0$ $(a \neq 0)$?

в) Что называют решением неравенства с одиим неизвестным x?

г) Что значит решить неравеиство с одннм неизвестным?

д) Что значит, что два неравенства равносильиы?

е) Сформулируйте утверждення о равносильиости неравеиств.

64. Является ли неравенство:

а) $3 - 2x > 0$; б) $\frac{7x-3}{5} < 1$; в) $x^2 - 5x + 1 < 0$;

г) $7x - \frac{x}{3} > 0$; д) $4x - 5x^2 > 0$; е) $3x^2 + 7 < 0$

неравенством первой степени; лииейным; второй степени?

65. Приведите неравенство:

а) $4x + 2x^2 - 1 > 0$; б) $6 + x^2 < 0$;

в) $\frac{x^2}{3} - x + 0{,}2 < 0$; г) $1 - 7x + \frac{x^2}{2} > 0$

к виду $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$, назовнте коэффицнент при x^2 и свободиый член.

66. Вычислите дискриминант иеравенства:

а) $x^2 - 7x + 10 > 0$; б) $x^2 + 9x + 20 < 0$;

в) $x^2 - x - 7 < 0$; г) $x^2 + x - 5 > 0$.

Является ли число, указанное в скобках, решением неравенства **(67—68)**:

67. а) $x^2 - 3x + 4 > 0$ $\left(\frac{1}{3}\right)$; б) $x^2 - 2x + 3 < 0$ $\left(\frac{1}{2}\right)$;

в) $2x^2 - 5x - 1 < 0$ (-2); г) $3x^2 - 3x + 1 > 0$ (-3);

д) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{7} < 0$ (15); е) $\frac{x^2}{4} + x - \frac{1}{7} < 0$ (12)?

68*. а) $x^2 - 11{,}7x + 17 < 0$ $(\sqrt{3})$; б) $x^2 - 11{,}4x + 14 > 0$ $(\sqrt{2})$;

в) $x^2 + x - 12 > 0$ (π); г) $x^2 - 2x - 15 < 0$ $(-\pi)$?

69. Напишите неравенство с положнтельиым коэффициентом при x^2, равносильное неравенству:

а) $-x^2 + 5x + 7 > 0$; б) $-2x^2 - 4x + 8 < 0$;

в) $-\frac{1}{3}x^2 + 9 > 0$; г) $-\frac{3}{5}x^2 - 5 < 0$.

70. Напишите неравенство с коэффициентом 1 при x^2, равносильное неравенству:

а) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 5 > 0$; б) $\frac{1}{3}x^2 - 8x + 3 < 0$;

в) $\frac{1}{5}x^2 - 5x + 7 > 0$; г) $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 1 < 0$.

71. Разделив правую и левую части неравенства на общий делитель свободного члена и коэффициентов при x^2 и при x, напишите неравенство, равносильное неравенству:

а) $4x^2 - 6x + 10 > 0$; б) $-6x^2 - 12x - 6 < 0$;
в) $-9x^2 - 90x - 81 > 0$; г) $10x^2 - 20x + 30 > 0$;
д) $12x^2 - 16x + 8 < 0$; е) $-11x^2 - 44x - 33 < 0$.

2.2. Неравенства второй степени с положительным дискриминантом

Пусть надо решить неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0, \tag{1}$$

где a, b и c — данные числа, причем $a > 0$, $D = b^2 - 4ac > 0$.

Как мы знаем, в этом случае

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \tag{2}$$

где x_1 и x_2 — корни трехчлена $ax^2 + bx + c$. Поэтому неравенство (1) можно переписать в виде

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0. \tag{3}$$

Так как a — положительное число, то неравенство

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0 \tag{4}$$

равносильно неравенству (3).

Заметим, что точки $x = x_1$ и $x = x_2$ не удовлетворяют неравенству (4). Так как $D > 0$, то $x_1 \neq x_2$. Для определенности будем считать, что $x_1 < x_2$. Отметим на координатной оси Ox точки x_1 и x_2 (рис. 11).

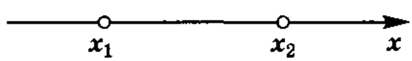


Рис. 11

Эти точки делят ось Ox на три интервала: $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; +\infty)$.

Пусть x принадлежит интервалу $(x_2; +\infty)$, тогда

$$x - x_1 > 0 \text{ и } x - x_2 > 0,$$

и, следовательно, $(x - x_1)(x - x_2) > 0$.

Пусть далее x принадлежит интервалу $(x_1; x_2)$, тогда

$$x - x_1 > 0 \text{ и } x - x_2 < 0,$$

и, следовательно, $(x - x_1)(x - x_2) < 0$.

Пусть x принадлежит интервалу $(-\infty; x_1)$, тогда

$$x - x_1 < 0 \quad \text{и} \quad x - x_2 < 0,$$

и, следовательно, $(x - x_1)(x - x_2) > 0$.

Поэтому множество всех решений неравенства (1) состоит из двух интервалов $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$. Его записывают с помощью знака объединения множеств ($\cup$): $(-\infty; x_1)\cup(x_2; +\infty)$ — и читают так: «Объединение интервалов $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$».

Отметим, что множество всех решений неравенства

$$ax^2 + bx + c < 0 \ (a > 0,\ D > 0) \qquad (5)$$

образует интервал $(x_1; x_2)$.

Результат, к которому мы пришли, можно также получить, используя график квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c \ (a > 0). \qquad (6)$$

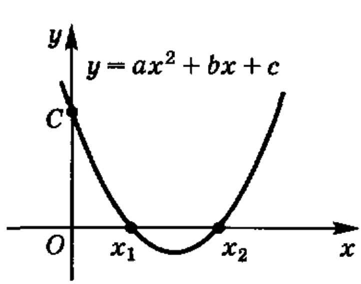


Рис. 12

Учитывая, что $a > 0$, $D > 0$ и $x_1 < x_2$, покажем схематически, как расположен график функции (6) в координатной плоскости (рис. 12).

Очевидно, что для тех x, для которых соответствующие точки параболы расположены выше оси Ox, выполняется неравенство (1), а для тех x, для которых они расположены ниже оси Ox, выполняется неравенство (5). Из рисунка 12 видно, что множество всех решений неравенства

$$ax^2 + bx + c > 0$$

состоит из двух интервалов $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$, а множество всех решений неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ образует интервал $(x_1; x_2)$.

Таким образом, чтобы решить неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ или } ax^2 + bx + c < 0$$

при $D>0$, надо найти корни x_1 и x_2 ($x_1<x_2$) квадратного трехчлена ax^2+bx+c, определить знак трехчлена на интервалах $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$ и $(x_2; +\infty)$ и записать в ответ интервал (или объединение интервалов), на котором неравенство выполняется.

Пример 1. Решим неравенство

$$x^2 - 5x + 6 < 0. \qquad (7)$$

Для неравенства (7) дискриминант $D = 1 > 0$ и трехчлен $x^2 - 5x + 6$ имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Поэтому неравенство (7) можно переписать в виде

$$(x-2)(x-3) < 0. \qquad (8)$$

Отметим на координатной оси Ox точки 2 и 3 (рис. 13). Легко видеть, что выражение $(x - 2)(x - 3)$ положительно для любого x, расположенного правее точки 3, отрицательно для любого x, распо-

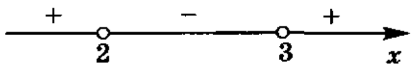


Рис. 13

ложенного между точками 2 и 3, положительно для любого x, расположенного левее точки 2.

Поэтому множество всех решений неравенства (8), следовательно, и равносильного ему неравенства (7) образует интервал (2; 3). Этот же результат можно получить, используя график функции $y = x^2 - 5x + 6$ (рис. 14).

Ответ: (2; 3).

Пример 2. Решим неравенство

$$-x^2 - x + 6 < 0. \qquad (9)$$

Умножив неравенство (9) на -1, получим равносильное ему неравенство

$$x^2 + x - 6 > 0, \qquad (10)$$

в котором коэффициент при x^2 уже положителен.

Дискриминант этого неравенства $D = 25 > 0$. Корни квадратного трехчлена $x^2 + x - 6$ есть $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$. Отметим на координатной оси Ox точки -3 и 2 (рис. 15). Рассуждая, как при решении примера 1, получим, что множество всех решений неравенства (10), а значит, и неравенства (9) образует объединение интервалов $(-\infty; -3)$ и $(2; +\infty)$. К этому же выводу приходим с помощью рисунка 16, на котором изображена парабола $y = x^2 + x - 6$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

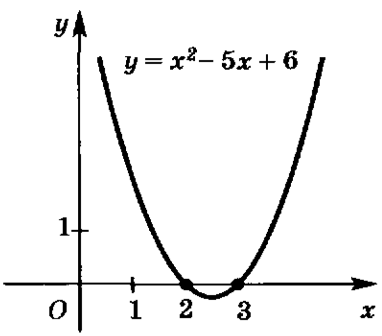


Рис. 14

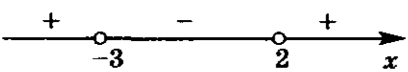


Рис. 15

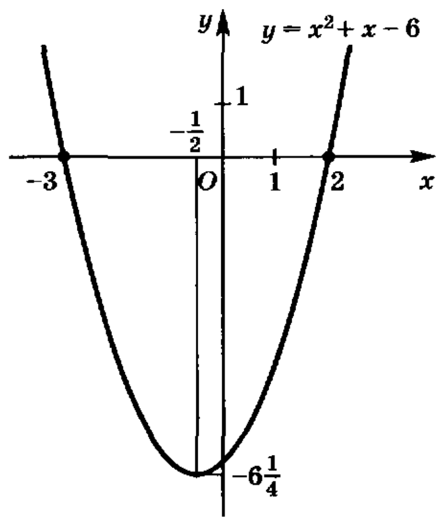


Рис. 16

72. а) Как решается неравенство второй степени с положительным дискриминантом?

б) Как используется график квадратичной функции для решения неравенства второй степени?

в) Имеют ли решения неравенства $ax^2+bx+c>0$ и $ax^2+bx+c<0$, если $a>0$ и их дискриминант больше нуля?

73. Приведите неравенство:

а) $-x^2-5x-6<0$; б) $-x^2-7x+8>0$;

в) $3x^2-15x-18>0$; г) $-2x^2-8x+10>0$

к виду $(x-x_1)(x-x_2)>0$ или $(x-x_1)(x-x_2)<0$.

74. На рисунке 17 отмечены числа 1 и 3, обращающие произведение $(x-1)(x-3)$ в нуль. Определите, какие знаки имеет каждый множитель и их произведение на интервалах I, II, III.

75. Составьте неравенство второй степени с одним неизвестным, все решения которого отмечены на рисунке 18 штриховкой.

76. Решите неравенство и определите, является ли число, указанное в скобках, решением неравенства:

а) $9x^2-10x+1<0$ $(0,(3))$; б) $3x^2-14x+8>0$ $(3,(8))$;

в) $5x^2-6x-11<0$ $(\sqrt{5})$; г) $6x^2-5x-4>0$ $(1,(3))$.

77. Решите неравенство и отметьте на координатной оси его решения:

а) $(x-9)(x-2)>0$; б) $(x-8)(x-19)<0$;

в) $(x+3)(x-5)<0$; г) $(x-4)(x+7)>0$.

Решите неравенство (**78—83**):

78. а) $(2x-1)(3x+5)<0$; б) $(1{,}2x-0{,}5)(7x-1)<0$;

в) $(4x+3)(5x+2)>0$; г) $\left(1\frac{1}{3}x+\frac{1}{12}\right)(0{,}7x+4)>0$.

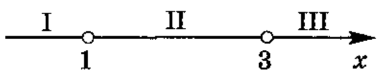


Рис. 17

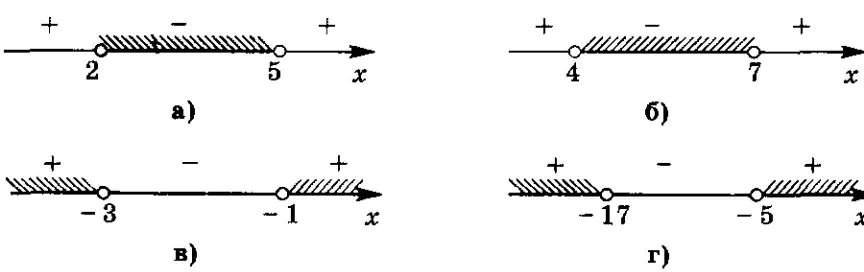


Рис. 18

79. а) $x^2 - x > 0$; б) $x^2 + x < 0$;

в) $5x^2 - x < 0$; г) $3x^2 + x > 0$;

д) $4x^2 + 7x > 0$; е) $3x - 2x^2 < 0$.

80. а) $x^2 - 4 > 0$; б) $x^2 - 9 < 0$;

в) $x^2 - 100 < 0$; г) $1 - x^2 > 0$.

81. а) $x^2 - 3 > 0$; б) $x^2 - 5 < 0$;

в) $2 - x^2 < 0$; г) $13 - x^2 > 0$.

82. а) $0{,}5x^2 - x < 0$; б) $1{,}3x^2 - 2x < 0$;

в) $3\frac{1}{2}x - x^2 > 0$; г) $\frac{7}{8}x^2 - 1\frac{3}{5} > 0$.

83. а) $2x^2 - 3 < 0$; б) $7x^2 - 1 > 0$;

в) $5 - 0{,}2x^2 > 0$; г) $1{,}2 - 3x^2 < 0$.

84. Решите неравенство, используя график:

а) $x^2 - 3x + 2 > 0$; б) $x^2 + 4x + 3 < 0$;

в) $x^2 + 5x + 6 < 0$; г) $x^2 - 5x + 4 > 0$;

д) $3x^2 - 2x - 5 < 0$; е) $4x^2 - x - 3 < 0$;

ж) $7x^2 + 2x - 5 > 0$; з) $10x^2 + 3x - 1 > 0$.

85. Решите неравенство:

а) $0{,}25x^2 - 4x + 12 > 0$; б) $0{,}5x^2 + 8x + 24 < 0$;

в) $3 - x + \frac{1}{16}x^2 < 0$; г) $4x + \frac{1}{4}x^2 + 12 > 0$;

д) $5x^2 - x - 7 < 0$; е) $8x^2 - 3 - 2x > 0$;

ж) $2x^2 + 5 - 17x > 0$; з) $15x + 3 + 4x^2 < 0$.

86. Прн каких значениях x точки графика функции:

а) $y = x^2 - 6x + 8$; б) $y = x^2 - 2x - 8$;

в) $y = -x^2 + 2x + 3$; г) $y = -x^2 + x + 12$

расположены выше осн Ox? ниже оси Ox?

87. Укажите все значення x, прн каждом нз которых функция:

а) $y = x^2 + 1{,}5x - 1$; б) $y = x^2 - 3{,}5x + 2$;

в) $y = 4x^2 + 19x - 5$; г) $y = 3x^2 - 5x - 2$;

д) $y = -2x^2 + 5x + 3$; е) $y = -3x^2 - 8x + 9$

принимает положительные значения; отрицательиые значення.

2.3. Неравенства второй степени с дискриминантом, равиым нулю

Пусть надо решить неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0, \tag{1}$$

где a, b и c — данные числа, причем $a > 0$, $D = b^2 - 4ac = 0$.

Как мы знаем, в этом случае

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2,$$

где $x_0 = -\frac{b}{2a}$ — корень квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Поэтому неравенство (1) можно переписать в виде

$$a(x - x_0)^2 > 0.$$

При $x = x_0$ многочлен $(x - x_0)^2$ равен нулю. При любом же числовом значении $x \neq x_0$ многочлен $(x - x_0)^2$, а значит, и многочлен $a(x - x_0)^2$ принимают положительные значения. Следовательно, решением неравенства (1) будет любое число x, кроме $x = x_0$. Иначе говоря, множество всех решений неравенства (1) состоит из двух интервалов $(-\infty; x_0)$ и $(x_0; +\infty)$, где x_0 — корень квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Из сказанного следует также, что при тех же условиях на числа a, b и c неравенство

$$ax^2 + bx + c < 0 \tag{2}$$

не имеет решений.

Эти же выводы можно получить, используя график квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{3}$$

Так как $a > 0$, $D = 0$, то можем изобразить схематически, как расположен график функции (3) (рис. 19), откуда сразу видно, что неравенство (1) справедливо для всех x, кроме $x = x_0 = -\frac{b}{2a}$, а неравенство (2) не имеет решений.

Таким образом, чтобы решить неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0$$

или

$$ax^2 + bx + c < 0$$

при $D = 0$, надо найти корень x_0 квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, определить знак трехчлена на интервалах $(-\infty; x_0)$ и $(x_0; +\infty)$ и записать в ответ $(-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$, если неравенство выполняется на каждом из этих двух интервалов, или «нет решений», если неравенство не выполняется.

Пример. Решим неравенства

$$4x^2 + 4x + 1 > 0, \tag{4}$$

$$4x^2 + 4x + 1 < 0. \tag{5}$$

Находим дискриминант неравенств (4) и (5):

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0.$$

Так как дискриминант равен нулю, то квадратный трехчлен $4x^2 + 4x + 1$ имеет единственный корень $x_0 = -\frac{1}{2}$ и $4x^2 + 4x + 1 > 0$ при

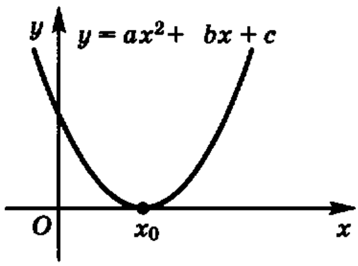


Рис. 19

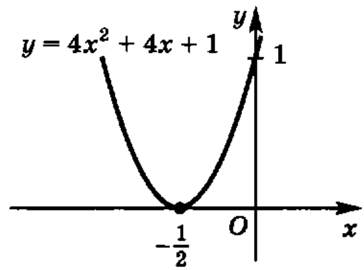


Рис. 20

всех $x \neq -\frac{1}{2}$, откуда видно, что решением неравенства (4) будет любое $x \neq -\frac{1}{2}$, т. е. множество всех решений неравенства (4) состонт нз двух интервалов $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ и $\left(-\frac{1}{2};\ +\infty\right)$. Неравенство же (5), очевндно, ие имеет решенн́й. На рнсунке 20 в плоскостн xOy нзображена парабола

$$y = 4x^2 + 4x + 1.$$

Вся она, кроме точки $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, расположена выше осн Ox. Из рисунка 20 видно, что решением неравенства (4) являются все x, кроме $x = -\frac{1}{2}$, а неравенство (5) решений не нмеет.

88°. Имеет ли решения неравенство второй степенн, если его днскриминант равен нулю? Какне случаи возможны?

89. С помощью графика квадратичной функцни объяснпте, почему неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ прн $a > 0$ н $D = 0$ не имеет решенпй?

90. Найдите все x, прн каждом нз которых выражение:

а) $2x^2$; б) $\frac{x^2}{2}$; в) $(x + 3)^2$; г) $(x - 1)^2$

принимает положнтельное значеине.

91. Существуют ли x, при которых выраженне:

а) $-x^2$; б) $-3x^2$; в) $(2 - x)^2$; г) $-(x + 4)^2$

прннимает положительное значенне?

92. Определите, является ли решеннем неравенства число, указанное в скобках:

а) $25x^2 - 10x + 1 < 0$ $\left(-1\frac{2}{7}\right)$; б) $4x^2 + 12x + 9 > 0$ $(-2{,}5)$;

в) $x^2 - x + 0{,}25 > 0$ $(\sqrt{3})$; г) $x^2 + x + \frac{1}{4} < 0$ $(-1{,}7)$.

Решите неравенство (**93—94**):

93. а) $(x-4)^2>0$; б) $(x+1)^2>0$;

в) $(2x-3)^2>0$; г) $(7-4x)^2>0$.

94. а) $x^2-4x+4>0$; б) $x^2-2x+1>0$;

в) $x^2+10x+25<0$; г) $x^2-8x+16<0$.

95*. Решите неравенство, используя график квадратичной функции:

а) $x^2-2x+1>0$; б) $x^2+6x+9<0$;

в) $x^2+4x+4<0$; г) $4x^2-4x+1>0$.

96. Решите неравенство:

а) $4x^2+20x+25<0$; б) $9x^2-36x+36>0$;

в) $49x^2+14x+1>0$; г) $25x^2-10x+1<0$;

д) $2x^2+3x+1\frac{1}{8}>0$; е) $9x^2-10x+2\frac{7}{9}<0$.

97. Найдите все значения k, при каждом из которых неравенство:

а) $x^2-24x+k>0$ верно при всех x, кроме $x=12$;

б) $64x^2+kx+9>0$ верно при всех x, кроме $x=-\frac{3}{8}$.

98. Найдите все x, при каждом из которых неверно неравенство:

а) $x^2+8x+16>0$; б) $9x^2-6x+1<0$.

2.4. Неравенства второй степени с отрицательным дискриминантом

Рассмотрим неравенство

$$ax^2+bx+c>0 \qquad (1)$$

где a, b и c — данные числа и $a>0$, $D=b^2-4ac<0$.

Выделяя полный квадрат из трехчлена ax^2+bx+c, получим

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}. \qquad (2)$$

Из равенства (2) следует, что неравенство (1) можно переписать следующим образом:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}>0,$$

откуда, учитывая, что $a>0$ и $D<0$, видно, что неравенство (1) выполняется для любого x, т. е. на интервале $(-\infty;\ +\infty)$.

Отсюда также следует, что при указанных выше условиях ($a>0$, $D<0$) неравенство $ax^2+bx+c<0$ не имеет решений.

При $a>0$ и $D<0$ график функции

$$y=ax^2+bx+c$$

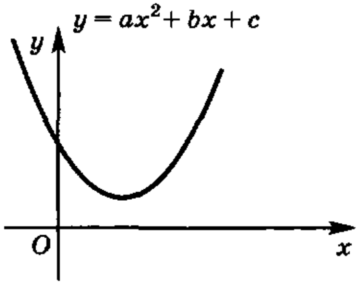


Рис. 21

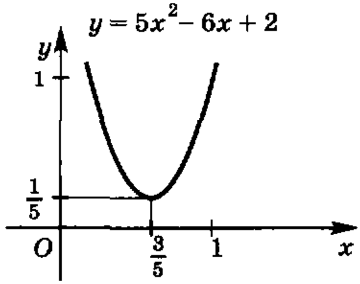


Рис. 22

схематически изображен на рисуике 21. Вся парабола расположена выше оси Ox, и поэтому иеравеиство (1) справедливо для любого зиачения x.

Таким образом, чтобы решить неравенство

$$ax^2 + bx + c > 0$$

или

$$ax^2 + bx + c < 0$$

при $D < 0$, надо определить знак трехчлена иа иитервале $(-\infty; +\infty)$ и записать в ответ $(-\infty; +\infty)$, если неравеиство выполняется на этом интервале, или «нет решений», если неравенство не выполияется.

Пример. Решим иеравенства

$$5x^2 - 6x + 2 > 0, \qquad (3)$$

$$5x^2 - 6x + 2 < 0. \qquad (4)$$

Дискриминант каждого из этих неравенств $D = -4 < 0$, значит, трехчлеи $5x^2 - 6x + 2$ не имеет корней и на иитервале $(-\infty; +\infty)$ имеет знак «+». Поэтому неравенство (3) выполняется для любых x, т. е. на интервале $(-\infty; +\infty)$, а иеравеиство (4) не имеет решений.

На рисунке 22 изображена парабола $y = 5x^2 - 6x + 2$. Из рисунка видно, что неравенство (3) справедливо для любого x, а неравенство (4) не имеет решеиий.

99°. Имеет ли неравенство второй степеии решения, если его дискримииант меиьше нуля? Какие случаи возможны?

100. С помощью графика квадратичной фуикции объясиите, почему неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ при $a > 0$ и $D < 0$ не имеет решеиий.

101. Решите иеравенство, используя график квадратичной функции:

а) $x^2 - x + 3 > 0$; б) $x^2 + 2x + 2 < 0$;

в) $x^2 - 3x + 4 < 0$; г) $x^2 + x + 5 < 0$.

Решите неравенство (102—104):

102. а) $3x^2-2x+1>0$; б) $5x^2-4x+2<0$;

в) $-4x^2+x-6<0$; г) $-7x^2+3x-1>0$.

103. а) $0{,}2x^2-x+100>0$; б) $1{,}7x^2+x+10<0$;

в) $\frac{x^2}{5}-\frac{3x}{7}+8<0$; г) $\frac{2x^2-x}{3}-12>0$.

104. а) $x^2-4{,}8x-1<0$; б) $x^2+3{,}5x-2>0$.

105. Укажите все значения m, при каждом из которых неравеиство верно при любом значении x:

а) $2x^2-x+m>0$; б) $3x^2+2x+m>0$.

2.5. Неравенства, сводящиеся к неравенствам второй степени

Часто прнходится решать неравенства, левые и правые части которых являются многочленами.

Для решения таких неравенств можно применять утверждения, приведенные в п. 1.3. На основании этих утверждений после переиоса всех членов неравенства в левую его часть и приведеиия подобных членов получится неравенство, равиосильное исходному. В правой части полученного неравенства будет стоять иуль, а в левой — миогочлеи. Дальше в этом пункте будут рассмотрены примеры решения неравенств, сводящихся к неравенствам второй степенн.

Пример 1. Решим иеравенство

$$x^2-2x+3>2x^2-3-x. \qquad (1)$$

Перенеся все члены неравеиства в левую его часть, получим неравенство

$$x^2-2x+3-2x^2+3+x>0, \qquad (2)$$

равносильное неравенству (1).

Приведя в неравенстве (2) подобные члены, прнходнм к неравенству

$$-x^2-x+6>0, \qquad (3)$$

равносильному неравенству (2). Умножив его на -1, получим равносильное ему неравенство второй степенн с положительным коэффицнентом при x^2:

$$x^2+x-6<0. \qquad (4)$$

Дискрнминант неравенства (4) $D=25>0$. Квадратный трехчлен x^2+x-6 имеет два корня: $x_1=-3$ и $x_2=2$. Поэтому неравенство (4) можно записать в виде

$$(x-(-3))(x-2)<0. \qquad (5)$$

Отметим на координатной оси Ox точки -3 и 2 (см. рис. 15). Легко видеть, что выражение $(x-(-3))(x-2)$ положительно для любого x, расположенного правее точки 2, отрицательно для любого x, расположенного между точками -3 и 2, положительно для любого x, расположенного левее точки -3.

Следовательно, множество всех решений неравенства (5), а значит, и равносильного ему неравенства (1) образует интервал $(-3; 2)$.

Этот же результат можно получить, используя график функции $y = x^2 + x - 6$ (см. рис. 16).

Ответ: $(-3; 2)$.

Пример 2. Решим неравенство

$$x^2 > 5. \qquad (6)$$

Перенесем 5 в левую часть неравенства (6), получим неравенство второй степени

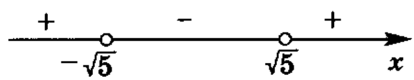
$$x^2 - 5 > 0, \qquad (7)$$

равносильное неравенству (6). Разлагая на линейные множители многочлен x^2-5, приходим к неравенству

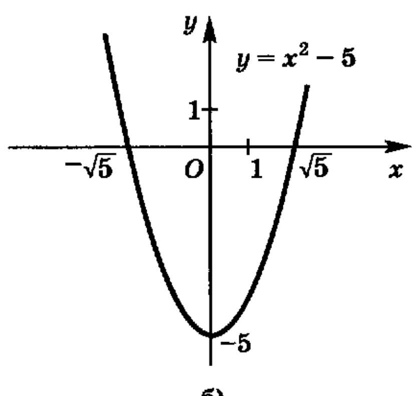
$$(x-(-\sqrt{5}))(x-\sqrt{5}) > 0, \qquad (8)$$

равносильному неравенству (7).

Отметим на координатной оси Ox точки $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$ (рис. 23, *а*). Рассуждая, как и выше, получим, что множество всех решений неравенства (8), а значит, и неравенства (6) образует объединение интервалов $(-\infty; -\sqrt{5})$ и $(\sqrt{5}; +\infty)$. Этот же результат можно получить, используя график линейной функции $y = x^2 - 5$, изображенный на рисунке 23, *б*.



а)



б)

Рис. 23

Ответ: $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.

Пример 3. Решим неравенство

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2} > \frac{1}{3}x^2. \qquad (9)$$

Перенеся все члены неравенства (9) в левую часть, получим неравенство

$$-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{2} > 0, \qquad (10)$$

равносильное неравенству (9). Так как производить вычисления с

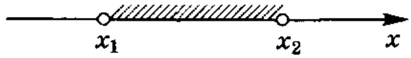


Рис. 24

целыми коэффициентами удобнее, то умножим неравенство (10) иа число -30. Получим иеравенство

$$10x^2 - 6x - 15 < 0, \qquad (11)$$

равносильное неравенству (10).

Так как квадратный трехчлен $10x^2 - 6x - 15$ имеет два кория:

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{159}}{10} \text{ и } x_2 = \frac{3+\sqrt{159}}{10},$$

то неравенство (11) равносильно неравенству

$$(x - x_1)(x - x_2) < 0. \qquad (12)$$

Рассуждая, как выше (рнс. 24), получим, что множество всех решений неравенства (12) образует ннтервал $(x_1;\ x_2)$.

Следовательно, множество всех решений неравенства (9) образует интервал $\left(\frac{3-\sqrt{159}}{10}; \frac{3+\sqrt{159}}{10}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{3-\sqrt{159}}{10}; \frac{3+\sqrt{159}}{10}\right)$.

106^0. Как решают неравенства, левые н правые части которых многочлены?

107. Являются ли равносильнымн неравенства:

а) $3 - x + x^2 > 0$ и $x^2 > x - 3$;

б) $x^2 - 5 < 3x$ и $4x^2 - 12x < 20$;

в) $\frac{x^2 - 7x}{2} < 4$ н $3x^2 - 21x - 24 < 0$;

г) $x^2 + 5x - 7 > 0$ н $0{,}01x^2 - 0{,}07 > -\frac{1}{20}x$?

108. Приведите неравенство:

а) $7 > 3x - 5x^2$; б) $2x > -3 + 2x^2$;

в) $13x^2 - 5 < x$; г) $4x + 5 > x^2$

к виду $ax^2 + bx + c > 0$ нли $ax^2 + bx + c < 0$.

109. Приведите неравенство:

а) $10x - x^2 > 1$; б) $4x^2 - 6 > 9$;

в) $7 < 14x + 2x^2$; г) $5x^2 > 13x - 8$

к виду $ax^2 + bx + c < 0$.

110. Приведите неравенство:

а) $-x^2 > 7 - 3x$; б) $-x^2 < 5x - 6$; в) $-1,2x < 3 - 0,5x^2$

к виду $x^2 + px + q > 0$ или $x^2 + px + q < 0$.

Решите неравенство **(111–115)**:

111. а) $0,5x^2 > x$; б) $1,3x^2 < 2x$;

в) $3\frac{1}{2}x < x^2$; г) $\frac{7}{8}x > 1\frac{3}{5}x^2$;

д) $7 > 4x^2$; е) $5 < -x^2$;

ж) $2x^2 < 3$; з) $3x^2 > -5$.

112. а) $10x^2 > 3 + 5x$; б) $12x^2 > 8x + 3$;

в) $23x < 9x^2 + 8$; г) $7x^2 - 6 > 25x$.

113. а) $5(x-1)^2 > 5(1-x) - x$;

б) $2(x+1)^2 < 2(2x+1) - (x-1)(x+1)$;

в) $(x-1)^2 + (x-2)^2 < 1$;

г) $(x+3)(x-2) > 3x + 10 - (x+2)^2$.

114. а) $x^2 > 6x - 9$; б) $16x^2 < 8x - 1$;

в) $4 - 3x < 1 - 2x^2$; г) $6x > 12 - 5x^2$;

д) $x^2 - 7x + 5 > 3x^2 - 5x$; е) $4x^2 + 8x > 7x - 12$.

115. а) $\frac{x-1}{3} + 0,2x^2 < 1$; б) $x^2 - \frac{7-2x}{4} > 0,2$;

в) $\frac{(x-1)(x-2)}{15} < \frac{x+1}{5} - \frac{x}{3}$; г) $\frac{12-x^2}{4} - \frac{x}{3} < \frac{(x-3)^2}{12}$.

116. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$; в) $y = \frac{5x}{\sqrt{1-x}}$;

г) $y = \frac{4}{\sqrt{x^2}}$; д) $y = \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}$; е) $y = \frac{8x-7}{\sqrt{x^2+4}}$;

ж) $y = \frac{x^2-4x}{\sqrt{x^2-4}}$; з) $y = \frac{9x}{\sqrt{x^2+3}}$; и) $y = \frac{-12}{\sqrt{x^2-14x+4}}$;

к) $y = \frac{1}{\sqrt{2-3x-x^2}}$; л) $y = \frac{-5x}{\sqrt{x^2-3}}$; м) $y = \frac{5+x^2}{\sqrt{5-x^2}}$.

117. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{1}{|x-1|}$; б) $y = \frac{2}{|x+1|}$; в) $y = \frac{4}{|x|}$;

г) $y = \frac{3}{\sqrt{x^2-2x+1}}$; д) $y = \frac{1-5x}{\sqrt{x^2+4x+4}}$; е) $y = \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2-6x+9}}$.

§ 3. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

3.1. Метод интервалов

Отметим на координатной оси Ox число x_0 (рис. 25).

Точка x_0 делит ось Ox на две части:

1) для любого x, находящегося справа от точки x_0, двучлен $x - x_0$ положителен;

2) для любого x, находящегося слева от точки x_0, двучлен $x - x_0$ отрицателен.

Это свойство двучлена лежит в основе метода интервалов. Пусть, например, требуется решить неравенство

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) > 0 \qquad (1)$$

или неравенство

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) < 0, \qquad (2)$$

где $x_1 < x_2 < x_3$.

Отметим на оси Ox точки x_1, x_2 и x_3. Они делят ось Ox на четыре интервала: $(-\infty;\ x_1)$, $(x_1;\ x_2)$, $(x_2;\ x_3)$, $(x_3;\ +\infty)$ (рис. 26).

Рассмотрим выражение

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3). \qquad (3)$$

Очевидно, что для любого x, находящегося справа от x_3, любой двучлен в произведении (3) положителен, так как точка x находится правее всех точек x_1, x_2, x_3. Поэтому и $A(x) > 0$ для любого x, принадлежащего интервалу $(x_3;\ +\infty)$.

Для любого x, находящегося между точками x_2 и x_3, последний сомножитель в произведении (3) отрицателен, так как x находится левее точки x_3, а любой из оставшихся сомножителей положителен, так как x находится правее точек x_1 и x_2. Поэтому $A(x) < 0$ для любого x из интервала $(x_2;\ x_3)$.

Аналогично рассуждая, получим, что $A(x) > 0$ для любого x из интервала $(x_1;\ x_2)$ и $A(x) < 0$ для любого x из интервала $(-\infty;\ x_1)$.

На этом рассуждении основан **метод интервалов** решения неравенств (1) и (2), состоящий в следующем: на оси Ox отмечают точки x_1, x_2, x_3, над интервалом $(x_3;\ +\infty)$ ставят знак «плюс», над интервалом $(x_2;\ x_3)$ ставят знак «минус», над интервалом $(x_1;\ x_2)$ — знак «плюс», над интервалом $(-\infty;\ x_1)$ — знак «минус» (рис. 27).

Тогда множество всех решений неравенства (1) будет состоять из всех интервалов, над которыми поставлен знак «плюс», а множество всех решений неравенства (2) будет состоять из всех интервалов, над которыми поставлен знак «минус».

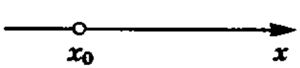


Рис. 25

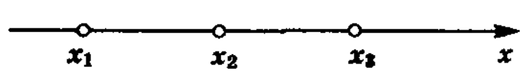


Рис. 26

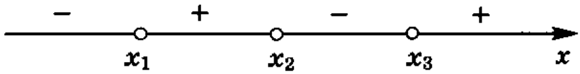


Рис. 27

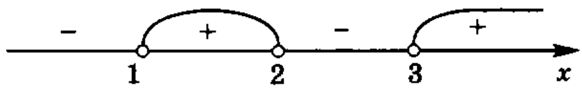


Рис. 28

Отметим, что сами числа x_1, x_2, x_3 не являются решениями неравенств $A(x) > 0$ и $A(x) < 0$. Этим объясняется, что множество решений этих неравенств состоит из интервалов, а не из отрезков или полуинтервалов.

Подобным образом можно решать неравенства

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) > 0$$

и

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) < 0,$$

где $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, n — натуральное число.

Отметим, что фактически этим же методом мы решали неравенства второй степени с положительным дискриминантом.

Пример 1. Решим неравенство

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) > 0. \qquad (4)$$

Будем решать неравенство (4) методом интервалов. Отметим на оси Ox точки 1, 2, 3. Над интервалами $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; +\infty)$ справа налево поочередно расставим знаки «плюс» и «минус» (рис. 28), начиная с «плюса». Из рисунка видно, что множество всех решений неравенства (4) состоит из двух интервалов $(1; 2)$ и $(3; +\infty)$. (На рисунке они отмечены дугами.)

Ответ: $(1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Пример 2. Решим неравенство

$$(2 - x)(x^2 - 4x + 3)(x + 1) > 0. \qquad (5)$$

Разлагая квадратный трехчлен $x^2 - 4x + 3$ на множители:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3),$$

получим, что неравенство (5) можно записать в виде

$$(x - (-1))(2 - x)(x - 1)(x - 3) > 0. \qquad (6)$$

Умножая неравенство (6) на -1, получим, что оно равносильно неравенству

$$(x - (-1))(x - 1)(x - 2)(x - 3) < 0. \qquad (7)$$

Поэтому остается решить неравенство (7). Оно уже записано в нужном для метода интервалов виде. Отметим на оси Ox точки -1, 1, 2, 3 (рис. 29). Применяя метод интервалов, находим, что множество всех решений неравенства (5) состоит из двух интервалов: $(-1;\ 1)$ и $(2;\ 3)$.

Ответ: $(-1;\ 1)\cup(2;\ 3)$.

○ *Пример 3.* Решим неравенство

$$(x-1)^3(x-2)^2(x-3)^4(x-4)<0. \qquad (8)$$

Неравенство (8) нельзя решать, как предыдущие неравенства, так как не все двучлены в его левой части находятся в первой степени. Для решения таких неравенств обычно применяется **общий метод интервалов**, состоящий в следующем: на оси Ox отметим точки 1, 2, 3, 4, а затем в каждом из интервалов

$$(-\infty;\ 1), \qquad (1;\ 2), \qquad (2;\ 3), \qquad (3;\ 4), \qquad (4;\ +\infty) \qquad (9)$$

исследуем знак многочлена

$$A(x)=(x-1)^3(x-2)^2(x-3)^4(x-4). \qquad (10)$$

Над промежутком справа от наибольшего корня многочлена $A(x)$ ставят знак «плюс», так как на этом промежутке все множители положительны. Затем, двигаясь справа налево, при переходе через очередной корень меняют знак, если соответствующий этому корню двучлен возведен в нечетную степень, и сохраняют знак, если он возведен в четную степень, так как знаки двучлена и его нечетной степени совпадают, а четная степень двучлена всюду положительна, кроме корня этого двучлена. Над каждым интервалом ставят найденный знак «плюс» или «минус». Тогда множество всех решений неравенства (8) будет состоять из всех интервалов, над которыми поставлен знак «минус».

Исследуем знак многочлена (10) в каждом из интервалов (9). Над интервалами (9) должны стоять знаки, как на рисунке 30, так как при $x>4$ все множители положительны; в точке 4 произведение меняет знак, так как разность $(x-4)$ возведена в нечетную степень 1; в точках 3 и 2 произведение не меняет знака, так как разности $(x-3)$ и $(x-2)$ возведены в четную степень; в точке 1 произведение меняет знак, так как разность $(x-1)$ возведена в нечетную степень. Поэтому множество всех решений неравенства (8) состоит из трех интервалов: $(1;\ 2)$, $(2;\ 3)$, $(3;\ 4)$.

Ответ: $(1;\ 2)\cup(2;\ 3)\cup(3;\ 4)$. ●

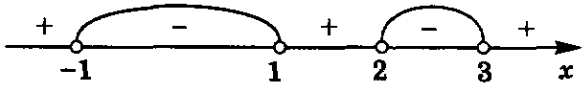


Рис. 29

Рис. 30

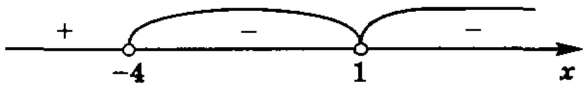


Рис. 31

Пример 4. Решим неравенство

$$(4-3x-x^2)(x^2-4x+5)(x-1)<0. \qquad (11)$$

Прежде всего исследуем квадратные трехчлены в левой части неравенства (11). У квадратного трехчлена $4-3x-x^2$ дискриминант $D=25>0$, поэтому этот квадратный трехчлен имеет два корня $x_1=-4$ и $x_2=1$ и справедливо тождество

$$4-3x-x^2=-(x-1)(x+4). \qquad (12)$$

У квадратного трехчлена x^2-4x+5 дискриминант $D=-9<0$, поэтому этот квадратный трехчлен не имеет корней и для любого x справедливо неравенство $x^2-4x+5>0$.

Используя тождество (12), перепишем неравенство (11) в виде

$$-(x^2-4x+5)(x+4)(x-1)^2<0. \qquad (13)$$

Это неравенство можно решить учитывая, что для всех x множитель x^2-4x+5 положителен. Для этого отметим на оси Ox точки -4 и 1 и определим знак левой части неравенства (13) на каждом из полученных интервалов (рис. 31).

Получаем, что множество всех решений неравенства (11) есть множество $(-4; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $(-4; 1) \cup (1; +\infty)$.

118°. а) В чем заключается метод интервалов решения неравенств? К неравенствам какого вида он применим?

б) Равносильны ли неравенства $x>2$ и $x-2>0$?

в) Верно ли, что если $x>1$, то $x-1>0$?

г) Верно ли, что если $x<1$, то $x-1<0$?

119. Если число x расположено на координатной оси левее числа 5, верно ли, что: а) $x-5<0$; б) $x-5>0$?

120. Если число x расположено на координатной оси правее числа -2, верно ли, что: а) $x-(-2)<0$; б) $x+2>0$?

121. 1) Если число x расположено на координатной оси левее числа 4, верно ли, что: а) $x-5<0$; б) $x-2<0$?

2) Если число x расположено на координатной оси правее числа 10, верно ли, что: а) $x-11>0$; б) $x-9>0$?

122. а) Если число x расположено между числами 1 и 3, то какие знаки имеют двучлены $x-1$ и $x-3$?

б) Если число x расположено между числами -3 и -1, то какие знаки имеют двучлены $x+3$ и $x+1$?

123. Дан двучлен $x - 6$. Прн какнх значениях x этот двучлен прннимает:

а) значенне, равное нулю;

б) положительные значення;

в) отрнцательные значення?

124. а) Еслн чнсло x расположено между чнсламн 2 н 5, какие знакн имеют двучлены $x - 2$ н $x - 5$; какой знак нмеет выраженне $(x - 2)(x - 5)$?

б) Если чнсло x расположено левее числа 7, какие знакн нмеют двучлены $x - 7$ н $x - 8$ н выраженне $(x - 7)(x - 8)$?

125. На коорднnatной осн отмечены чнсла 1, 2 н 3. Определите знакн каждого двучлена $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$ н знак выражения $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ на нптервалах $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; +\infty)$.

126. а) Найднте все такне x, что выражение $(x - 1)(x - 3)(x - 4)$ прнннмает значение, равное нулю.

б) Определнте нптервалы, на которых выражение $(x - 1)(x - 3)(x - 4)$ прннимает положнтельные значення; отрнцательные значення.

Решнте неравенство методом нптервалов **(127—133)**:

127. а) $(x - 1)(x - 3)(x - 5) > 0$; б) $(x - 1)(x - 2)(x - 4) < 0$;
в) $(x + 1)(x - 1)(x - 2) > 0$; г) $(x + 2)(x + 1)(x - 3) < 0$.

128. а) $(x^2 + x)(5x + 5) < 0$;
б) $(3x + 12)(2x + 10)(x^2 - 2x) > 0$;
в) $(6x^2 - 12x)(x + 4) < 0$;
г) $(2x^2 - 16x)(4x + 4)(7x - 21) > 0$.

129. а) $(2 - x)(x + 3)(x - 7) < 0$;
б) $(5 - x)(x - 3)(x + 12) > 0$;
в) $(3x - 4)(1 - x)(2x + 1) > 0$;
г) $(2x - 5)(7x + 3)(x + 8) < 0$;
д) $(5x - 6)(6x - 5)(1 - x)(3x + 1) > 0$;
е) $(10x - 1)(x + 2)(7x - 4)(7x + 5) < 0$.

130. а) $(x - 3)(x^2 - 3x + 2) > 0$;
б) $(2 - x)(x^2 - x - 12) < 0$;
в) $(x^2 - 3x - 4)(x^2 + x - 12) < 0$;
г) $(x^2 - 5x - 6)(x^2 + 2x - 15) > 0$.

131. а) $(x^2 - 16)(x^2 - x - 2)(x + 2) > 0$;
б) $(4 + x)(9 - x^2)(x^2 - 2x + 1) < 0$.

132. а) $(x - 2)^2(x - 1) > 0$; б) $(x + 4)(x + 3)^2 < 0$;
в) $(3x - 1)^3(x + 1) > 0$; г) $(x + 2)(5x + 3)^2 < 0$.

133. а) $(2 - 4x)(x^2 - x - 2) < 0$;
б) $(-4 - 3x)(x^2 + 3x - 4) > 0$;
в) $(3x - 7)(x^2 + 2x + 2) < 0$;
г) $(5x - 8)(x^2 - 4x + 5) > 0$;
д) $(x^2 + 4x + 5)(x^2 - 4x + 3)(x - 1) < 0$;
е) $(-x^2 + 6x - 10)(x^2 - 5x + 6)(x - 2) > 0$.

3.2. Решение рациональных неравенств

Пусть дана алгебраическая дробь $\frac{A(x)}{B(x)}$, где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены относительно x.

Неравенство

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \qquad (1)$$

называют **рациональным неравенством.**

Напомним, что решением неравенства с одним неизвестным x называют такое число x_0, при подстановке которого в неравенство вместо x получается верное числовое неравенство.

Решить неравенство (1) — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Легко видеть, что любое решение неравенства (1) есть решение неравенства

$$A(x) \cdot B(x) > 0. \qquad (2)$$

Действительно, если число x_0 есть решение неравенства (1), то справедливо числовое неравенство $\frac{A(x_0)}{B(x_0)} > 0$, означающее, что числа $A(x_0)$ и $B(x_0)$ одного знака, т. е. что

$$A(x_0) \cdot B(x_0) > 0,$$

а это означает, что x_0 есть решение неравенства (2). Аналогично показывается, что любое решение неравенства (2) есть решение неравенства (1). Следовательно, неравенства (1) и (2) равносильны.

Будем сначала рассматривать лишь тот случай, когда многочлены $A(x)$ и $B(x)$ разлагаются в произведение *разных двучленов* вида $x - x_0$. Тогда неравенство (2) можно решить методом интервалов. Поэтому обычно не повторяют для неравенства (1) рассуждения, проведенные ранее для многочленов, а сразу к неравенству (1) применяют метод интервалов.

Пример 1. Решим неравенство

$$\frac{x-3}{x-2} > 0. \qquad (3)$$

Применяя метод интервалов (рис. 32), находим, что множество всех решений неравенства (3) состоит из двух интервалов: $(-\infty; 2)$ и $(3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

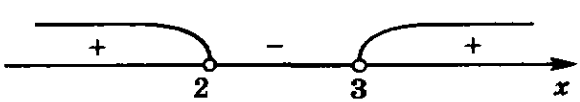


Рис. 32

Пример 2. Решим неравенство

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x+2}<0. \tag{4}$$

Разложим на линейные множители квадратные трехчлены

$$x^2-2x-3 \tag{5}$$

и

$$x^2-3x+2. \tag{6}$$

Квадратный трехчлен (5) имеет два корня: $x_1=-1$, $x_2=3$ и разлагается на линейные множители:

$$x^2-2x-3=(x-(-1))(x-3).$$

Квадратный трехчлен (6) имеет два корня: $x_1=1$, $x_2=2$ и разлагается на линейные множители:

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2).$$

Следовательно, неравенство (4) можно переписать в виде

$$\frac{(x-(-1))(x-3)}{(x-1)(x-2)}<0.$$

Применяя метод интервалов (рис. 33), находим, что множество всех решений неравенства (4) состоит из двух интервалов: $(-1;\,1)$ и $(2;\,3)$.

Ответ: $(-1;\,1)\cup(2;\,3)$.

Пусть даны алгебраические дроби $\frac{A_1(x)}{B_1(x)}$ и $\frac{A_2(x)}{B_2(x)}$, где $A_1(x)$, $B_1(x)$, $A_2(x)$, $B_2(x)$ — многочлены относительно x. Неравенство

$$\frac{A_1(x)}{B_1(x)}>\frac{A_2(x)}{B_2(x)} \tag{7}$$

также называют рациональным неравенством. Для его решения надо перенести все его члены в левую часть, вычесть дроби в левой части и, не сокращая числитель и знаменатель дроби на общие множители, привести неравенство (7) к виду

$$\frac{A(x)}{B(x)}>0, \tag{8}$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены относительно x.

Затем решить неравенство (8). Так как неравенства (7) и (8) равносильны, то все решения неравенства (8) будут всеми решениями неравенства (7).

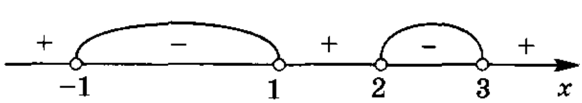


Рис. 33

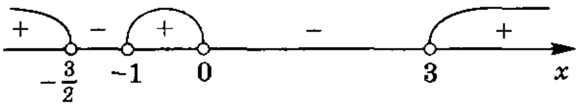


Рис. 34

Пример 3. Решим неравенство

$$\frac{x}{2x+3} > \frac{1}{x}. \qquad (9)$$

Перенеся дробь $\frac{1}{x}$ в левую часть неравенства (9), получим неравенство

$$\frac{x}{2x+3} - \frac{1}{x} > 0, \qquad (10)$$

равносильное неравенству (9).

Вычитая дроби в левой части неравенства (10), получим неравенство

$$\frac{x^2-2x-3}{x(2x+3)} > 0, \qquad (11)$$

равносильное неравенству (10). Разложив квадратный трехчлен x^2-2x-3 на множители, перепишем неравенство (11) в виде

$$\frac{(x+1)(x-3)}{2(x-0)\left(x+\frac{3}{2}\right)} > 0. \qquad (12)$$

Применяя к неравенству (12) метод интервалов (рис. 34), получим, что множество всех его решений состоит из объединения интервалов $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$, $(-1; 0)$, $(3; +\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (-1; 0) \cup (3; +\infty)$.

134°. Какие неравенства называют равносильными?

135. Равносильны ли неравенства:

а) $3x > 0$ и $\frac{3}{x} > 0$; б) $-5x > 0$ и $\frac{5}{x} < 0$;

в) $\frac{x+1}{x+2} < 0$ и $(x+1)(x+2) < 0$?

Решите неравенство (**136—149**):

136. а) $\frac{5}{x} > 0$; б) $-\frac{3}{x} < 0$; в) $\frac{1}{x-1} < 0$; г) $\frac{1}{2x+1} > 0$.

137. а) $\frac{x-1}{x-2} > 0$; б) $\frac{x-4}{x-2} < 0$; в) $\frac{x+3}{x-5} < 0$; г) $\frac{x-7}{x+8} > 0$.

138. а) $\frac{x-6}{2-x} > 0$; б) $\frac{4-x}{x-9} < 0$; в) $\frac{2x+4}{4x+2} < 0$; г) $\frac{3x+6}{9x-3} > 0$.

139. а) $\frac{2x+3}{x-4}<0$; б) $\frac{7+x}{4x-3}>0$; в) $\frac{12x-6}{5x-4}>0$; г) $\frac{7x-1}{2x+5}<0$.

140. а) $\frac{(x-1)(x+2)}{x-3}>0$; б) $\frac{(x+1)(x-2)}{x+3}<0$;

в) $\frac{(x+1)(7-x)}{(8+x)(x-5)}<0$; г) $\frac{(x-6)(4-x)}{(x-1)(1+x)}>0$.

141*. а) $\frac{4x^2-x}{x+1}>0$; б) $\frac{3x-x^2}{x-2}<0$;

в) $\frac{13x-2x^2}{4x-x^2}<0$; г) $\frac{15x-5x^2}{12x-3x^2}>0$.

142*. а) $\frac{x^2-1}{x+4}>0$; б) $\frac{x^2-4}{x-3}<0$;

в) $\frac{x^2-4x+4}{x-1}<0$; г) $\frac{7+x}{x^2-6x+9}>0$.

143*. а) $\frac{x^2-x-2}{x^2-9}>0$; б) $\frac{16-x^2}{x^2-5x-6}<0$;

в) $\frac{x^2-7x+6}{(3x^2-12)(x-1)}<0$; г) $\frac{25x^2-1}{5x^2-26x+5}<0$.

144*. а) $\frac{x^2-x+2}{x^2-7x+6}<0$; б) $\frac{x^2+4x-21}{x^2-2x+5}>0$;

в) $\frac{x^2-3}{7x^2+3x+2}>0$; г) $\frac{4x^2+5x+3}{5-x^2}<0$.

145. а) $\frac{1}{x}>1$; б) $\frac{1}{x}<1$;

в) $\frac{x+1}{x}>1$; г) $\frac{x-1}{x}<1$.

146*. а) $\frac{x}{x-1}<\frac{1}{x}$; б) $\frac{3}{x}>\frac{5x}{3}$;

в) $\frac{x+1}{x-1}<\frac{3}{x}$; г) $\frac{2}{x}>\frac{x-2}{3-x}$.

147*. а) $\frac{x^2-6x+4}{x-1}>0$; б) $\frac{x^2+6x+6}{x+2}<0$;

в) $\frac{x^2-5}{2x^2-3x-2}<0$; г) $\frac{3-x^2}{3x^2-4x-1}>0$.

148*. а) $\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-3)^2}>0$; б) $\frac{(x+1)^2(x-2)^2}{x+3}<0$;

в) $\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-3)^2}>0$; г) $\frac{(x+1)(x-2)^3}{x+3}<0$.

149*. а) $\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x+3)^2}>0$; б) $\frac{(x-1)^2(x+2)^2}{x+3}<0$;

в) $\frac{(x-1)^3(x-2)}{(x-3)^2}>0$; г) $\frac{(x+1)(x+2)^3}{x+3}<0$;

д) $\frac{(x-1)^2(x-3)}{x+3}>0$; е) $\frac{(x-2)^2(x+4)}{x-4}<0$.

3.3. Системы рациональных неравенств

Если надо найти все числа x, каждое из которых есть решение одновременно всех данных рациональных неравенств, то говорят, что надо решить *систему рациональных неравенств с одним неизвестным* x.

Для того чтобы решить систему рациональных неравенств, надо решить каждое неравенство системы, затем найти общую часть (пересечение) полученных множеств решений — она и будет множеством всех решений системы.

Пример 1. Решим систему неравенств

$$\begin{cases}(x-1)(x-5)(x-7)<0,\\ \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-4}>0.\end{cases} \tag{1}$$

Применяя метод интервалов, находим, что множество всех решений первого неравенства системы (1) состоит из интервалов $(-\infty;\ 1)$ и $(5;\ 7)$ (рис 35, *а*), а множество всех решений второго неравенства системы (1) состоит из интервалов $(2;\ 3)$ и $(4;\ +\infty)$ (рис. 35, *б*).

Отметим на координатной оси Ox первое и второе множества (рис. 36). Общая часть этих множеств — интервал $(5;\ 7)$. Следовательно, множество всех решений системы (1) составляет интервал $(5;\ 7)$.

Ответ: $(5;\ 7)$.

Пример 2. Решим систему неравенств

$$\begin{cases}x^2-6x+10<0,\\ \dfrac{x^9-x^3+x+2}{x^4-x^2+1}>0.\end{cases} \tag{2}$$

Применяя метод выделения полного квадрата, можно написать, что $x^2-6x+10=x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+10=(x-3)^2+1$.

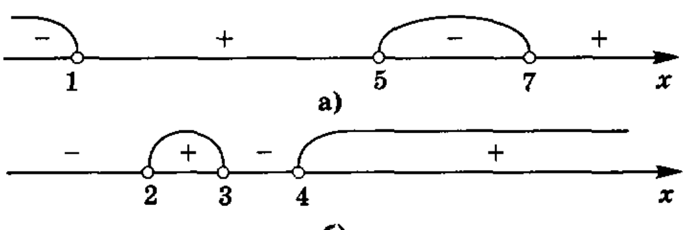


Рис. 35

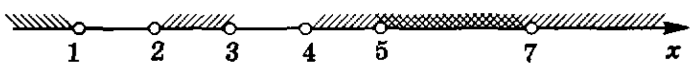


Рис. 36

Поэтому первое неравенство системы (2) можно записать так:

$$(x-3)^2+1<0,$$

откуда видно, что оно не имеет решений.

Теперь можно не решать второе неравенство системы (2), так как ответ уже ясен: система неравенств (2) не имеет решений.

Ответ: нет решений.

150°. а) Что значит решить систему рациональных неравенств?
б) Как решают системы рациональных неравенств?

151. Является ли какое-нибудь из чисел: -1, 1, 0, 2 — решением системы неравенств:

а) $\begin{cases}(x-3)^2>0,\\(x-2)(x-5)<0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x+4)(x-4)>0,\\(x+5)^2>0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^2-3x+5>0,\\\dfrac{1}{x-4}<2;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dfrac{x+4}{x}>5,\\x^2-6x-8<0?\end{cases}$

Решите систему неравенств (**152—158**):

152. а) $\begin{cases}(x+1)(x-3)<0,\\(x+2)(x-1)<0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x(x+5)<0,\\(x-1)(x-4)<0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}(x+2)(x+1)>0,\\(x+6)(x-3)<0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}(x-5)(x-6)>0,\\(x+3)(x-4)<0.\end{cases}$

153. а) $\begin{cases}(x-1)(x-2)<0,\\x(x-3)>0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x+10)(x-13)>0,\\(x+8)(x-12)<0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^2-4<0,\\x>9;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x<-2,\\x^2-9>0.\end{cases}$

154. а) $\begin{cases}(x-1)(x-2)>0,\\(x-1)(x-3)>0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x+3)(x+2)<0,\\(x-4)(x+2)>0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}(x+1)(x-1)>0,\\(x+1)(x-3)<0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}(x+4)(x-6)>0,\\x^2-1<0.\end{cases}$

155. а) $\begin{cases}(x-5)(x+1)>0,\\(x-10)^2>0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x+2)(x+3)<0,\\(x+2)^2>0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^2-4x+3>0,\\x^2(x-7)^2>0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}(x^2-1)(x+3)>0,\\(x+5)^2(x-1)^2>0.\end{cases}$

156. а) $\begin{cases}(x-2)(x-3)>0,\\ \dfrac{x+2}{(x-4)(x+4)}>0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x+2)(x+10)<0,\\ \dfrac{x-3}{(x+4)(x+7)}<0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^2>4,\\ \dfrac{x^2-9}{x^2-8x+16}>0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x^2<25,\\ \dfrac{x^2-16}{x^2+6x+9}<0.\end{cases}$

157. а) $\begin{cases}\dfrac{x-5}{x+3}>0,\\ \dfrac{x+7}{x-3}<0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{x+3}{x-4}<0,\\ \dfrac{x+8}{x-7}>0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2+4}>0,\\ \dfrac{x-5}{x^2-4}<0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x^2+1}<0,\\ \dfrac{x-2}{x^2-9}>0.\end{cases}$

158*. а) $\begin{cases}x^2-3|x|+2>0,\\ \dfrac{10}{x}>0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2-5|x|+4<0,\\ \dfrac{11}{x}<0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dfrac{|x|-1}{|x|+2}>0,\\ \dfrac{|x|-3}{|x|+4}<0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dfrac{|x|+1}{|x|-4}>0,\\ \dfrac{|x|-5}{|x|+0{,}1}<0.\end{cases}$

3.4. Нестрогие рациональные неравенства

Рассмотрим решение нестрогих неравенств

$$\frac{A(x)}{B(x)} \geqslant 0 \tag{1}$$

и

$$\frac{A(x)}{B(x)} \leqslant 0,$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — многочлены относительно x.

Если некоторое число x_0 есть решение неравенства (1), то справедливо числовое неравенство

$$\frac{A(x_0)}{B(x_0)} \geqslant 0.$$

Тогда в силу определения знака нестрогого неравенства справедливо или числовое неравенство

$$\frac{A(x_0)}{B(x_0)} > 0,$$

или числовое равенство

$$\frac{A(x_0)}{B(x_0)} = 0.$$

Иначе говоря, если число x_0 есть решение неравенства (1), то оно либо решение неравенства

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0, \qquad (2)$$

либо решение уравнения

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0. \qquad (3)$$

Заметим, что любое решение неравенства (2) и любое решение уравнения (3) есть решение неравенства (1).

Следовательно, *множество всех решений неравенства* $\frac{A(x)}{B(x)} \geqslant 0$ *есть объединение множества всех решений неравенства* $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ *и множества всех решений уравнения* $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$.

Аналогично *множество всех решений неравенства* $\frac{A(x)}{B(x)} \leqslant 0$ *есть объединение множества всех решений неравенства* $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ *и множества всех решений уравнения* $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$.

Заметим, что если многочлен $B(x)$, стоящий в знаменателе алгебраической дроби $\frac{A(x)}{B(x)}$, есть число 1, то приведенные выше рассуждения применимы и для решения неравенств $A(x) \geqslant 0$ и $A(x) \leqslant 0$, где $A(x)$ — многочлен относительно x.

Пример 1. Решим неравенство

$$3x - 7 \geqslant 0. \qquad (4)$$

Сначала решим уравнение

$$3x - 7 = 0. \qquad (5)$$

Его единственное решение $x_0 = \frac{7}{3}$.

Затем решим неравенство

$$3x - 7 > 0. \qquad (6)$$

Множеством всех решений неравенства (6) являются все $x > \frac{7}{3}$. Объединяя множества всех решений неравенства (6) и уравнения (5), получаем, что множество всех решений неравенства (4) составляет полуинтервал $\left[\frac{7}{3};\ +\infty\right)$.

Ответ: $\left[\frac{7}{3};\ +\infty\right)$.

Пример 2. Решим неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant 0. \tag{7}$$

Сначала решим уравнение

$$2x^2 - x - 1 = 0. \tag{8}$$

Оно имеет корни $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = 1$.

Теперь решим неравенство

$$2x^2 - x - 1 < 0. \tag{9}$$

Так как квадратный трехчлен $2x^2 - x - 1$ имеет корни $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = 1$, то неравенство (9) можно записать в виде

$$2\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)(x - 1) < 0.$$

Решая его методом интервалов (рис. 37, *а*), получаем, что множество всех решений неравенства (9) составляет интервал $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Объединяя множества всех решений неравенства (9) и уравнения (8), получаем (рис. 37, *б*), что множество всех решений неравенства (7) составляет отрезок $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Пример 3. Решим неравенство

$$9x^2 - 6x + 1 \leqslant 0. \tag{10}$$

Сначала решим уравнение

$$9x^2 - 6x + 1 = 0. \tag{11}$$

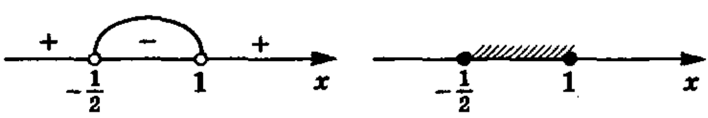
Оно имеет единственный корень $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

Теперь решим неравенство

$$9x^2 - 6x + 1 < 0. \tag{12}$$

Так как квадратный трехчлен $2x^2 - x - 1$ имеет единственный корень $x_0 = \frac{1}{3}$, то неравенство (12) можно записать в виде

$$9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 < 0.$$



а) б)

Рис. 37

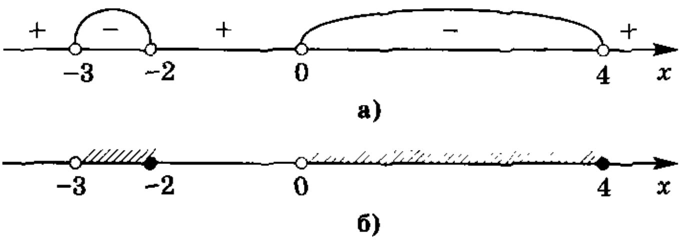


Рис. 38

Следовательно, нет ни одного действительного числа x, удовлетворяющего этому неравенству (квадрат любого действительного числа не может быть отрицательным). Поэтому неравенство (12) не имеет решений.

Итак, неравенство (10) имеет единственное решение $x = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пример 4. Решим неравенство

$$\frac{(x+2)(x-4)}{(x+3)x} \leqslant 0. \qquad (13)$$

Сначала решим уравнение

$$\frac{(x+2)(x-4)}{(x+3)x} = 0. \qquad (14)$$

Легко видеть, что оно имеет корни $x_1 = -2$ и $x_2 = 4$ и других корней не имеет.

Теперь решим неравенство

$$\frac{(x+2)(x-4)}{(x+3)(x-0)} < 0. \qquad (15)$$

Применяя метод интервалов (рис. 38, *а*), найдем, что множество всех решений неравенства (15) составляет два интервала: $(-3; -2)$ и $(0; 4)$.

Объединяя множества всех решений уравнения (14) и неравенства (15), получим (рис. 38, *б*) множество всех решений неравенства (13): $(-3; -2] \cup (0; 4]$.

Ответ: $(-3; -2] \cup (0; 4]$.

159°. Как решают нестрогие неравенства?

Решите неравенство (**160—166**):

160. а) $2x - 3 \leqslant 0$; б) $4x - 3 \geqslant 0$;
в) $5x - 8 \geqslant 3x - 1$; г) $2x - 4 \leqslant 4x - 3$.

161. а) $x^2 - 12x + 32 \leqslant 0$; б) $x^2 + 8x + 12 \leqslant 0$;
в) $2x^2 + x - 7 \geqslant 0$; г) $3x^2 - 5x - 1 \leqslant 0$.

162. а) $-x^2+2x-1\geqslant 0$; б) $-x^2+4x-4\leqslant 0$;

в) $3x^2+18x+27\leqslant 0$; г) $2x^2-20x+50\geqslant 0$.

163. а) $x^2-3x+5\geqslant 0$; б) $x^2+7x+10\leqslant 0$;

в) $8x^2-x+1\leqslant 0$; г) $4x^2-5x+6\geqslant 0$.

164. а) $(x^2-1)(x+3)\geqslant 0$; б) $(7-x)(4-x^2)\leqslant 0$;

в) $(12-5x)(x^2-4x+4)\geqslant 0$; г) $(x^2-5x+6)(x-3)\leqslant 0$.

165. а) $\frac{1}{x-1}\geqslant 0$; б) $\frac{5}{2-x}\leqslant 0$;

в) $\frac{x-8}{2x+3}\geqslant 0$; г) $\frac{3-4x}{5+x}\leqslant 0$.

166*. а) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-9}\geqslant 0$; б) $\frac{x^2-7x+10}{25-x^2}\geqslant 0$;

в) $1-x\geqslant\frac{1}{x-3}$; г) $\frac{5}{x}-4\leqslant\frac{2x+3}{x-1}$.

Решите систему неравенств **(167—169)**:

167. а) $\begin{cases}(x-1)(x-2)\geqslant 0,\\(x+1)(x-3)\leqslant 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x+3)(x+2)\leqslant 0,\\x(x-4)\leqslant 0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^2-5x+6\leqslant 0,\\x^2+x-2\geqslant 0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x^2+5x+6\geqslant 0,\\x^2-4x+3\leqslant 0.\end{cases}$

168. а) $\begin{cases}\frac{(x+2)(x-1)}{x+1}<0,\\x+3\geqslant 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{(x-2)(x+3)}{x-1}\geqslant 0,\\x+2>0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\frac{x-3}{x^2-9}\leqslant 0,\\\frac{x^2-4}{x+2}\geqslant 0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\frac{x+1}{x^2-1}\geqslant 0,\\\frac{x^2-16}{x-4}\geqslant 0.\end{cases}$

169*. а) $\begin{cases}|x|<2,\\(x-3)(x-2)\geqslant 0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}|x|>4,\\(x+5)(x-4)\leqslant 0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\frac{x^2-5x+6}{2x^2-3x+1}\leqslant 0,\\x^2-4\leqslant 0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\frac{(x-3)^2}{3x^2-5x+2}\leqslant 0,\\x(x-4)\leqslant 0;\end{cases}$

д) $\begin{cases}(x+1)(x^2-x-6)\geqslant 0,\\(x-1)(x^2-5x+6)\leqslant 0,\\(x+3)(x^2-4)\geqslant 0;\end{cases}$ е) $\begin{cases}(x+1)(x^2+8x+15)\leqslant 0,\\(x+2)(x^2+10x+24)\geqslant 0,\\(x+3)(x^2+9x+20)\geqslant 0.\end{cases}$

1. Доказательство числовых неравенств

Для числовых неравенств справедлнвы следующие утверждеиия:

1. Для любых действительных чисел a, b и c из справедливости неравеиств $a < b$ и $b < c$ следует справедливость неравенства $a < c$ (свойство транзитивиости иеравеиств).

2. Для любых действительных чисел a, b, c и d из справедливости неравеиств $a < b$ и $c < d$ следует справедливость иеравенства $a + c < b + d$ (одноимеиные числовые неравеиства можио складывать).

3. Для любых положительных чисел a, b, c и d из справедлнвости иеравенств $a < b$ н $c < d$ следует справедлнвость неравеиства $a \cdot c < b \cdot d$ (одноимеиные числовые иеравенства с положнтельиыми членами можно почленно перемножать).

4. Для любых действительиых чнсел a, b и c из справедлнвостн иеравенства $a < b$ следует справедливость иеравеиства $a + c < b + c$ (к обеим частям иеравенства можно прибавить любое чнсло).

5. Для любых действнтельных чисел a, b н любого положительного числа c из справедливости неравеиства $a < b$ следует справедливость неравенства $a \cdot c < b \cdot c$ (неравеиство можно умножить или разделить на любое положнтельное число).

Все эти утверждения являются следствиями основиых правил, которым подчииеиы действительные числа. Отметим, что утверждения 1—5 остаются справедлнвымн, если в иих зиаки строгих неравенств замеиить на зиаки иестрогих иеравеиств.

Поскольку не существует общего приема доказательства неравенств, то рассмотрнм лишь прнмеры доказательства неравенств с помощью свойств 1—5.

Пример 1. Докажем, что для любых положительных чисел a и b справедливо иеравеиство

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}. \tag{1}$$

Так как $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ — действнтельные числа для любых положительных чисел a н b, то неравенство

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0 \tag{2}$$

справедливо для любых положнтельных чисел a н b (квадрат действительиого числа неотрицателеи).

Примеияя формулу квадрата суммы и учитывая, что для любых положительиых чисел a и b верны равенства $(\sqrt{a})^2 = a$ и $(\sqrt{b})^2 = b$, перепишем неравенство (2) в виде

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geqslant 0. \tag{3}$$

Из утверждення 4 следует, что из справедливости неравенства (3) следует справедливость иеравенства

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}. \tag{4}$$

Из утверждения 5 следует, что из справедливости неравенства (4) следует справедливость неравенства (1), что и требовалось доказать.

Отметим, что левую часть неравенства (1) называют **средним арифметическим чисел** a **и** b, а правую часть — **средним геометрическим чисел** a **и** b. Поэтому часто свойство, выраженное неравенством (1), формулируют так:

Среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического.

Неравенство (1) между средним арифметическим и средним геометрическим часто используют для доказательства неравенств.

Пример 2. Докажем, что для любых положительных чисел x справедливо неравенство

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2. \qquad (5)$$

Рассмотрим неравенство

$$\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\geqslant 1, \qquad (6)$$

в левой части которого записано среднее арифметическое положительных чисел x и $\frac{1}{x}$, а в правой — их среднее геометрическое. Следовательно, неравенство (6) справедливо на основании свойства среднего арифметического и среднего геометрического.

Из утверждения 5 следует, что из справедливости неравенства (6) следует справедливость неравенства (5), что и требовалось доказать.

Пример 3. Докажем, что для любых положительных чисел a, b и c справедливо неравенство

$$(a+b)(b+c)(a+c)\geqslant 8abc. \qquad (7)$$

Из справедливости неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического двух положительных чисел следует справедливость неравенств

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab},$$
$$a+c\geqslant 2\sqrt{ac},$$
$$b+c\geqslant 2\sqrt{bc}.$$

Перемножая почленно эти неравенства, на основании утверждения 3 получим, что справедливо неравенство (7), что и требовалось доказать.

Часто при доказательстве неравенств бывает полезно использовать различные формулы, оценки, группировку слагаемых и т. п.

Пример 4. Докажем, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство

$$4(a^3+b^3)\geqslant(a+b)^3. \qquad (8)$$

Рассмотрим выражение $A = 4(a^3 + b^3) - (a + b)^3$, преобразуем его:

$$A = 4(a + b)(a^2 - ab + b^2) - (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) =$$
$$= (a + b)(4a^2 - 4ab + 4b^2 - a^2 - 2ab - b^2) =$$
$$= (a + b)(3a^2 - 6ab + 3b^2) = 3(a + b)(a - b)^2.$$

Теперь очевидно, что $A \geqslant 0$, если $a > 0$ и $b > 0$, т. е. доказана справедливость неравенства

$$4(a^3 + b^3) - (a + b)^3 \geqslant 0. \qquad (9)$$

По утверждению 4 из справедливости неравенства (9) следует справедливость неравенства (8), что и требовалось доказать.

Пример 5. Докажем, что для любого натурального n справедливо неравенство

$$\frac{2}{(2n + 1)^2} < \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n + 2}. \qquad (10)$$

Левую часть неравенства (10) можно записать в виде $\frac{2}{4n^2 + 4n + 1}$, а правую — в виде $\frac{2}{4n^2 + 4n}$.

Так как $4n^2 + 4n + 1 > 4n^2 + 4n$ для любого натурального n, то

$$\frac{2}{4n^2 + 4n + 1} < \frac{2}{4n^2 + 4n},$$

что и требовалось доказать.

Пример 6. Докажем, что для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n + 1)^2} < \frac{1}{4}. \qquad (11)$$

Применяя неравенство (10) и утверждение 2, получаем, что справедливо неравенство

$$2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n + 1)^2}\right) < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n + 2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n + 2}. \qquad (12)$$

Для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n + 2} < \frac{1}{2}.$$

Теперь, используя транзитивность неравенств (утверждение 1), получаем, что справедливо неравенство

$$2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n + 1)^2}\right) < \frac{1}{2}. \qquad (13)$$

Умножив правую и левую части неравеиства (13) на $\frac{1}{2}$, получим на основании утверждення 5, что справедливо неравенство (11). Тем самым неравенство (11) доказано.

Пример 7. Пусть a и b — любые действительные чнсла, такие, что $a + b = 2$. Докажем, что

$$a^4 + b^4 \geqslant 2. \qquad (14)$$

Для доказательства обозначим $a = 1 + c$, тогда $b = 1 - c$, где c — некоторое действительное чнсло.

Поэтому, применяя формулы сокращениого умножения, имеем

$$a^4 + b^4 = (1 + c)^4 + (1 - c)^4 = 2 + 12c^2 + 2c^4. \qquad (15)$$

Так как очевидно, что $2 + 12c^2 + 2c^4 \geqslant 2$, то из справедливостн равенства (15) следует справедливость неравенства (14), что и требовалось доказать.

Отметнм, что справедливость некоторых неравенств можно доказать с помощью метода математической нндукцнн. Даже такое очевидное иеравенство, как неравенство (12), надо доказывать с помощью метода математической индукции.

Докажнте неравенство (**170—173**), где a, b, c — действительные числа:

170. а) $4c^2 + 1 \geqslant 4c$; б) $(a + b)^2 \geqslant 4ab$;
в) $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$ $(a + b \geqslant 0)$;
г) $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ $(a > 0)$; д) $a^2 + \frac{1}{a^2} \geqslant 2$ $(a \neq 0)$;
е) $\frac{2a}{a^2 + 1} \leqslant 1$; ж) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ $(ab > 0)$.

171. а) $\sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a + b}$, еслн $a > 0$, $b > 0$;
б) $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqslant 4$, если $a > 0$, $b > 0$;
в) $(1 + a)\left(1 + \frac{1}{a}\right) \geqslant 4$, еслн $a > 0$;
г) $2a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2a(b + c)$;
д) $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, если $a > 0$, $b > 0$;
е) $(a^2 - b^2)^2 \geqslant 4ab(a - b)^2$.

172. а) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$;
б) $\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geqslant a + b + c$, если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$;
в) $-\sqrt{2} \leqslant a + b \leqslant \sqrt{2}$, еслн $a^2 + b^2 = 1$.

173. а) $|a+b| \leqslant |a|+|b|$; б) $|a-b| \leqslant |a|+|b|$;

в) $||a|-|b|| \leqslant |a-b|$.

174. Докажите, что:

а) сумма кубов катетов прямоугольного треугольника меньше куба гипотенузы;

б) $a^n < b^n$, если $0 < a < b$ и n — натуральное число.

175. а) *Задача Паппа Александрийского (III в.).* Докажите, что если a, b, c и d — положительные числа и $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, то выполняется неравенство $ad > bc$.

б) *Задача Евклида (III в. до н. э.).* Докажите, что если a, b, c, d — положительные числа и a — наибольшее число в пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то выполняется неравенство $a + d > b + c$.

2. Производные линейной и квадратичной функций

Мгновенная скорость. Начнем с примера.

Пример 1. Пусть материальная точка движется прямолинейно по закону

$$s(t) = 4t^2,$$

где s (м) — путь, пройденный ею за время t (с).

Спрашивается: какова средняя скорость этой точки за промежуток времени от $t_1 = 2$ до $t_2 = 5$?

Путь, пройденный за время $t_1 = 2$, равен:

$$s(2) = 4 \cdot 2^2 = 16,$$

а путь, пройденный за время $t_2 = 5$, равен:

$$s(5) = 4 \cdot 5^2 = 100.$$

Но тогда путь, пройденный за промежуток времени от $t_1 = 2$ до $t_2 = 5$, равен:

$$s(5) - s(2) = 100 - 16 = 84.$$

Средняя же скорость точки за промежуток времени от $t_1 = 2$ до $t_2 = 5$ равна:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{s(5) - s(2)}{5 - 2} = \frac{84}{3} = 28.$$

Пусть точка движется прямолинейно по закону

$$s = f(t).$$

Чтобы вычислить ее среднюю скорость за промежуток времени от момента t до момента $t + h$, рассуждаем аналогично.

Путь, пройденный точкой за время t, равен $f(t)$.

Путь, пройденный точкой за время $t + h$, равен $f(t + h)$.

Но тогда путь, пройденный точкой за промежуток времени от t до $t+h$, равен:

$$f(t+h)-f(t).$$

Следовательно, *средняя скорость точки за промежуток времени от t до $t+h$ равна:*

$$v_{\text{ср.}}=\frac{f(t+h)-f(t)}{h}. \qquad (1)$$

Введем теперь понятие скорости точки в момент времени t, или *мгновенной* скорости в момент времени t.

Обратимся к примеру 1.

Итак, пусть точка движется по закону $s(t)=4t^2$.

Зададим момент времени $t=3$.

Будем вычислять для разных малых h среднюю скорость движения нашей точки за время от $t=3$ до $t=3+h$. Результаты вычислений сведем в таблицу.

h	$[t;\ t+h]$	$v_{\text{ср.}}$
0,01	[3; 3+0,01]	24,04
0,001	[3; 3+0,001]	24,004
0,0001	[3; 3+0,0001]	24,0004
0,00001	[3; 3+0,00001]	24,00004
0,000001	[3; 3+0,000001]	24,000004

Из этой таблицы видно, что средняя скорость $v_{\text{ср.}}$ точки на отрезке времени $[3;\ 3+h]$ для малых h приближенно равна 24:

$$v_{\text{ср.}}\approx 24.$$

Это приближение тем лучше, чем меньше h. Можно еще сказать, что $v_{\text{ср.}}$ стремится к 24 при h, стремящемся к нулю, т. е.

$$v_{\text{ср.}}\to 24 \text{ при } h\to 0.$$

В данном случае число 24 называют скоростью точки в момент времени $t=3$.

В общем случае *если точка движется прямолинейно по закону*

$$s=f(t),$$

то ее скоростью, или мгновенной скоростью, в момент времени t называют число v, к которому стремится ее средняя скорость на промежутке времени $[t;\ t+h]$ при $h\to 0$:

$$v_{\text{ср.}}=\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\to v \quad \text{при } h\to 0.$$

Пример 2. Найдем мгновенную скорость v точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t)=4t^2$, в момент времени t.

Средняя скорость за промежуток времени $[t;\ t+h]$ равна:

$$v_{ср} = \frac{4(t+h)^2-4t^2}{h} = 8t + 4h.$$

Отсюда $8t + 4h \to 8t$ при $h \to 0$. Следовательно, $v = 8t$. Например:

$$v = 16 \text{ при } t = 2,$$
$$v = 24 \text{ при } t = 3.$$

Производные линейной и квадратичной функций. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a;\ b)$. Пусть x — любая точка этого интервала. Рассмотрим еще точки $x+h$ того же интервала.

Число, к которому стремится отношение

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

при h, стремящемся к 0, называют производной функции f в точке x и обозначают $f'(x)$ (читается: эф штрих от x):

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to f'(x) \text{ при } h \to 0.$$

Если производная при данном значении x существует, то она есть определенное число. Таким образом, если производная от функции существует при каждом значении x из интервала $(a;\ b)$, то она есть функция от x, определенная на интервале $(a;\ b)$.

На основании приведенных выше рассуждений можно сказать, что *мгновенная скорость v в момент времени t точки, движущейся по закону $s = f(t)$, равна производной функции f в точке t, т. е. $v = f'(t)$.*

Вычислим производные для некоторых функций, определенных на интервале $(-\infty;\ +\infty)$.

1) $f(x) = x$. Для любой точки x

$$f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = h.$$

Поэтому

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 1.$$

Следовательно, производная функции $f(x) = x$ в любой точке x равна 1, т. е. $x' = 1$.

2) $f(x) = C$[1]. Постоянную можно рассматривать как такую функцию от x, которая равна одному и тому же значению C для любого значения x из интервала $(-\infty;\ +\infty)$. Поэтому для этой функции

$$f(x) = f(x+h) = C,$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0.$$

[1] Обозначение C для постоянной происходит от лат. constans (constantis) — постоянный.

Следовательно, производиая постоянной $f(x) = C$ в любой точке равна нулю, т. е. $C' = 0$.

3) $f(x) = kx + b$, где k и b — данные числа.

Для любой точки x имеем

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(k(x+h)+b)-(kx+b)}{h} = k.$$

Следовательно, производная линейиой функции $f(x) = kx + b$ в любой точке x равна числу k, т. е.

$$(kx + b)' = k.$$

Отсюда следует, что если тело движется по линейному закону $s = at + b$, то его мгновеиная скорость v в любой момент времени t равна:

$$v = f'(t) = a,$$

т. е. его скорость в этом случае постоянна.

4) $f(x) = x^2$. Для любой точки x имеем

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2.$$

Поэтому

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x + h.$$

Поскольку $2x + h$ стремится к $2x$, когда h стремится к 0, то

$$f'(x) = 2x.$$

Следовательно, производная функции $f(x) = x^2$ в любой точке равиа $2x$, т. е.

$$(x^2)' = 2x.$$

5) $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — данные числа, причем $a \neq 0$. Для любой точки x имеем

$$f(x+h) - f(x) = (a(x+h)^2 + b(x+h) + c) - (ax^2 + bx + c) = 2axh + bh + ah^2.$$

Поэтому

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2ax + b + ah.$$

Поскольку $2ax + b + ah \to 2ax + b$, когда $h \to 0$, то

$$f'(x) = 2ax + b.$$

Следовательно, производная квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ в любой точке x равна $2ax + b$, т. е.

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b. \qquad (2)$$

З а м е ч а н и е. Так как

$$(ax^2)' = 2ax, \quad (bx)' = b, \quad c' = 0,$$

то равенство (2) может быть записано в виде

$$(ax^2 + bx + c)' = (ax^2)' + (bx)' + c'.$$

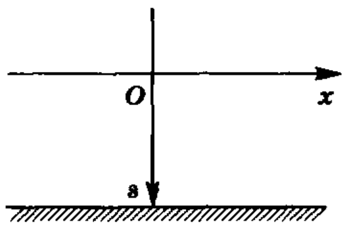


Рис. 39

Это равенство означает, что производная суммы слагаемых ax^2, bx, c равна сумме их производных.

Это утверждение верно и в общем случае: $(f(x)+\varphi(x))' = f'(x)+\varphi'(x)$, но мы не останавливаемся на его обосновании.

6) Из физики мы знаем, что если тело падает под действием силы тяжести с нулевой начальной скоростью с некоторой высоты, то, поместив начало координат в начальную точку и направив положительную полуось Os к земле (рис. 39), получим закон движения этого тела:

$$s(t)=\frac{gt^2}{2},$$

где g — ускорение силы тяжести ($g\approx 9{,}8$ м/с^2). Но тогда мгновенная скорость падающего тела в момент времени t равна: $v=s'(t)=gt$. Мы получили известную в физике формулу для определения скорости этого движения в любой момент времени t: $v=gt$.

Первообразная для линейной функции. Производная функции x^2 равна функции $2x$: $(x^2)'=2x$.

Но говорят также, что функция x^2 есть первообразная для функции $2x$.

Вообще *функцию $F(x)$ называют первообразной для функции $f(x)$, определенной на интервале $(a; b)$, если производная функции $F(x)$ равна $f(x)$ на этом интервале:*

$$F'(x)=f(x).$$

Заметим, что если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, то сумма $F(x)+C$, где C — любая постоянная, также есть первообразная для $f(x)$, потому что

$$(F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x).$$

Таким образом, любая первообразная для функции $f(x)$ имеет вид $F(x)+C$.

Например, не только x^2 есть первообразная для $2x$, но и x^2+C, где C — произвольная постоянная, есть первообразная для $2x$.

Отметим равенства

$$C'=0,\ (x+C)'=1,\ \left(\frac{x^2}{2}+C\right)'=x,\ \left(\frac{ax^2}{2}+bx+C\right)'=ax+b.$$

Из этих равенств следует, что функции

$$C,\quad x+C,\quad \frac{x^2}{2}+C,\quad \frac{ax^2}{2}+bx+C,$$

где C — произвольная постоянная, являются соответственно первообразными для функций $0,\ 1,\ x,\ ax+b$.

Выше по закону движения определялась скорость движения тела в любой момент времени. Часто требуется решить и обратную задачу: зная скорость движения тела, определить закон движения этого тела.

Отметим сразу, что для решения этой задачи требуются еще дополнительные данные о том, где находилось тело в момент начала движения. При решении этих задач существенно используется понятие первообразной. Покажем на примерах, как решают такие задачи.

Пример 3. Пусть тело движется прямолинейно с постоянной скоростью a. Найдем закон движения этого тела $s = f(t)$, считая, что $s = 0$ при $t = 0$.

Так как производная $f'(t)$ равна скорости движения, то

$$f'(t) = a$$

и $f(t)$ есть первообразная для a, но тогда

$$s = f(t) = at + C,$$

где C — неизвестная постоянная.

Так как $s = 0$ в момент $t = 0$, то $C = 0$. Поэтому искомый закон движения определяется равенством

$$s = at.$$

Пример 4. Пусть тело движется прямолинейно со скоростью

$$v = gt + a,$$

где t — время, отсчитываемое с начала движения. Найдем закон движения $s = f(t)$, считая, что $s = 0$ при $t = 0$.

Так как производная $f'(t)$ равна скорости движения, то

$$f'(t) = gt + a \tag{3}$$

и $f(t)$ есть первообразная для функции $gt + a$. Но тогда

$$s = f(t) = \frac{gt^2}{2} + at + C,$$

где C — неизвестная постоянная.

Так как $s = 0$ в момент $t = 0$, то $C = 0$. Поэтому искомый закон движения определяется равенством

$$s = \frac{gt^2}{2} + at.$$

Заметим, что $v = a$ при $t = 0$ (см. (3)). Это показывает, что в момент начала движения тело имело начальную скорость $v = a$.

176[1]. Как вычисляют среднюю скорость движения тела $v_{\text{ср.}}$ за промежуток времени от t до $t + h$, если известен закон прямолинейного движения тела $s(t)$?

[1] В заданиях данного пункта время измеряется в секундах, путь — в метрах, а скорость — в метрах в секунду.

177. Какова средняя скорость $v_{\text{ср.}}$ за промежутки времени

$$\left[5; 5 + \frac{1}{10}\right], \quad \left[5; 5 + \frac{1}{100}\right], \quad \left[5; 5 + \frac{1}{10\,000}\right]$$

для тел, законы прямолинейного движения которых таковы:
а) $s(t) = 5t + 3$; б) $s(t) = 3t^2 + 4$?

178°. Что называют мгновенной скоростью точки, движущейся прямолинейно по закону $s = f(t)$, в момент времени t?

179. Какова мгновенная скорость v в момент времени t для тел, законы прямолинейного движения которых таковы:
а) $s(t) = 5t + 3$; б) $s(t) = 3t^2 + 4$?

180. Дан закон прямолинейного движения материальной точки:
а) $s(t) = 2t$; б) $s(t) = 2t + 3$.
Вычислите мгновенную скорость v точки в момент $t_0 = 0$; 1; 5. Выразите v как функцию t и постройте график этой функции, если $t \in [0; 5]$.

181°. Что называют производной функции $f(x)$ в точке x?

182°. Чему равна мгновенная скорость тела, движущегося по закону $s = f(t)$?

183°. Чему равна производная постоянной?

184°. Чему равна производная функции $y = kx + b$?

185. Какова производная в точке x функции:
а) $y = 2x + 3$; б) $y = -2 - 3x$;
в) $y = 2x^2 - 3x + 1$; г) $y = -x^2 + 2x - 1$?

186. Закон прямолинейного движения точки определяется функцией:
а) $3t$; б) $3t^2 + 1$.
Какова скорость ее движения в момент времени t, в частности $t = 2$?

187°. Что называют первообразной для функции $f(x)$?

188°. Однозначно ли определяется первообразная для данной функции?

189. Чему равна первообразная для функции:
а) $f(x) = 0$; б) $f(x) = 1$; в) $f(x) = x$; г) $f(x) = ax + b$?

190°. Для решения каких физических задач применяется первообразная?

191. Чему равна первообразная для функции:
а) 2; б) $3x - 2$; в) $x + 1$; г) $-x - 4$; д) $2 - 2x$?

192. Скорость материальной точки определяется формулой:
а) $v(t) = 3$; б) $v(t) = 2t$; в) $v(t) = 2t + 1$.
Задайте формулой закон движения материальной точки $s(t)$, если известно, что $s(0) = 0$.

193. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, задается формулой $v(t) = v_0 - gt$, а высота H — формулой $H(t) = H_0 + v_0t - \frac{gt^2}{2}$, где $g \approx 9{,}8$ м/с^2 — ускоре-

3. Исторические сведения

Понятия равенства и неравенства чисел возникли в глубокой древности. Так, задачи на доказательство равенств и неравенств встречаются у великих математиков прошлого, которые для обозначения равенства и неравенства использовали слова или специальные обозначения, происходившие от сокращения этих слов. Еще более 2000 лет до н. э. было известно неравенство $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$, где $a > 0$, $b > 0$. Это неравенство обращается в верное равенство при условии $a = b$.

Современные специальные знаки для обозначения равенства и неравенства стали применять сравнительно недавно. Знак равенства = ввел в 1557 г. английский математик Р. Рикорд. Он мотивировал это так: никакие два предмета не могут быть более равными, чем два параллельных отрезка. Знаки неравенства > и < ввел в своей книге «Практика аналитического искусства» (1631) английский ученый Харрит. Знаки нестрогого неравенства $\geqslant$ (не меньше) и $\leqslant$ (не больше) введены в 1734 г. французским математиком П. Буге.

Задачи, связанные с неравенствами, встречаются в V книге «Начал» Евклида (IV в. до н. э.). Там доказано, что если a, b, c и d — положительные числа и a — наибольшее число в пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то выполняется неравенство $a + d > b + c$. В основном труде Паппа Александрийского (III в.), названном «Математическое собрание», доказывается, что если a, b, c и d — положительные числа и $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, то выполняется неравенство $ad > bc$.

4. Задания для повторения

196. Отметьте на координатной оси числа:
а) 0; 0,1; 0,2; 0,35; 0,7; 0,95; 1,05;
б) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{4}{8}$; $1\frac{1}{16}$.

197. Сравните числа:

а) 6 и 4;	б) 7,1 и 7,(09);	в) $\frac{1}{4}$ и 0,25;
г) $\frac{2}{3}$ и 0,6;	д) -2 и $-2{,}2$;	е) $-3{,}(5)$ и $-3{,}5$;
ж) 0,125 и $\frac{1}{8}$;	з) $\sqrt{2}$ и 1,41;	и) π и 3,14.

198°. Прочитайте записи:

а) $7 > 2{,}5$;	б) $-10 < 3 < 7{,}1$;	в) $5{,}2 \neq 5{,}(2)$;
г) $x > 2$;	д) $-2 < x < 4$;	е) $x < -9$;
ж) $\lvert x\rvert > 8$;	з) $\lvert x+1\rvert < 4$;	и) $\lvert x-2\rvert = 2$.

199. Запишите, используя буквы и знаки неравенств, все числа:
а) большие 5; б) не превышающие -2;

в) большие 1, но меньшие 11; г) не меньшие 12;
д) не большие -6; е) положительные.

200. Получится ли верное неравенство, если обе части неравенства $9 > 6$:

а) увеличить на положительное число;
б) уменьшить на положительное число;
в) умножить на положительное число;
г) разделить на отрицательное число?

201. а) Запишите верные неравенства, полученные умножением неравенства $4 > -2$ на: 3; -3; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$.

б) Запишите верные неравенства, полученные делением неравенства $-3 < 7$ на: 2; -2; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$.

202. а) Запишите верные неравенства, полученные прибавлением к обеим частям неравенства $-2 < 5$ числа 3; числа -8.

б) Запишите верные неравенства, полученные вычитанием из обеих частей неравенства $-7 < -3$ числа 1; числа -1.

203°. Верно ли неравенство:
а) $8 \geqslant 8$; б) $7 \geqslant 6$; в) $-1 \leqslant 2$; г) $-9 \geqslant -8$?

204°. а) Могут ли одновременно выполняться неравенства $a > b$ и $a < b$?

б) Могут ли одновременно выполняться неравенства $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$?

205. а) Если $a > b$, то всегда ли выполняется неравенство $ac > bc$? Приведите примеры.

б) Если $a > b$, то верно ли неравенство $-a < -b$?

в) Известно, что $c < d$. Верно ли неравенство $c(a^2 + 1) < d(a^2 + 1)$, где a — любое действительное число?

206. а) Докажите, что если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

б) Докажите, что если $a > b$ и $c \leqslant d$, то $a - c > b - d$.

в) Дано неравенство $a > b$. Всегда ли $a^2 > b^2$? Приведите примеры.

207. а) Справедливо ли неравенство $a^2 + b^2 > a^2$ при любых действительных значениях a и b?

б) Справедливо ли неравенство $a^2 + b^2 \geqslant b^2$ при любых действительных значениях a и b?

208. а) Может ли неравенство $a^2x > a$ (a — любое данное действительное число) не иметь решений?

Докажите неравенство (**209—211**), где a, b, c — действительные числа:

209. а) $\frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{b}$, если $a \geqslant b$, $ab > 0$; б) $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$, если $a \geqslant b$, $ab < 0$.

210. $(a + b + c)^2 \geqslant a(b + c - a) + b(a + c - b) + c(a + b - c)$.

211. а) $a^2 + b^2 \geqslant \frac{1}{2}$, если $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 1$;

б) $a^2 + 1 > \frac{2a}{a^2 + 1}$.

212*. а) Автомобилист ехал некоторое время со скоростью a км/ч, потом точно такое же время со скоростью b км/ч. Выразите через a и b среднюю скорость движения на всем пути (обозначьте ее v_1).

б) Автомобилист проехал некоторое расстояние со скоростью a км/ч, потом точно такое же расстояние со скоростью b км/ч. Выразите через a и b среднюю скорость движения на всем пути (обозначьте ее v_2).

в) Сравните v_1 и v_2 (см. предыдущие задания).

г) Для положительных чисел a и b различают: среднее арифметическое чисел a и b — число $A = \frac{a+b}{2}$; среднее геометрическое чисел a и b — число $G = \sqrt{ab}$; среднее гармоническое чисел a и b — число H, такое, что $\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$, откуда $H = \frac{2ab}{a+b}$. Докажите, что для чисел G, H и A выполняется неравенство $H \leqslant G \leqslant A$.

213*. В какую погоду самолет, летящий из Москвы в Санкт-Петербург и обратно, выполнит быстрее рейс: в безветренную или при ветре, дующем с постоянной скоростью от Москвы в направлении Санкт-Петербурга?

214. Докажите, что сумма квадратов двух различных положительных чисел больше удвоенного произведения этих чисел.

215. Какое наименьшее значение может принять выражение $a^2 + b^2$, если $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 2$?

216. Если система двух линейных неравенств не имеет решений, то следует ли из этого, что каждое неравенство системы не выполняется ни при каких значениях неизвестного?

217. Одна сторона треугольника равна 6 м, а сумма двух других 14 м. Определите возможные длины сторон треугольника, если они выражаются натуральными числами.

218. Найдите все значения x, при которых имеют смысл выражения:

а) $\frac{1}{x}$; б) x; в) $\frac{1}{x-1}$; г) $\frac{1}{x+12}$.

Найдите область определения функции (**219—221**):

219. а) $y = \sqrt{x-7}$; б) $y = 2 + \sqrt{12-x}$;

в) $y = \sqrt{1-3x}$; г) $y = \frac{3}{\sqrt{2x+7}}$.

220. а) $y = \sqrt{x+1}$; б) $y = \sqrt{3-2x}$;

в) $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}$; г) $y = \sqrt{3+4x} + \sqrt{7x-5}$.

221. а) $y = \frac{1}{x-5}$; б) $y = \frac{x}{x+6} - \frac{3x}{3-7x}$;

в) $y = \sqrt{4-3x} + \frac{1}{2x}$; г) $y = \frac{x-5}{3x-1} + \sqrt{5-x}$;

д) $y = \sqrt{2x-3}$; е) $y = \sqrt{3x+5}$;

ж) $y = \sqrt{x^2-1}$; з) $y = \sqrt{x^2+5}$.

222. Решите неравенство, считая, что a — данное число:
а) $ax > 0$; б) $ax > 1$; в) $ax + 1 > 3$;
г) $ax - 8 < 11$; д) $ax > x$; е) $ax + 1 > x$.

223. Докажите, что полупериметр треугольника больше каждой из сторон этого треугольника.

224. Докажите, что если $|x| < a$, то $-a < x < a$.

225*. Запишите неравенство в виде двойного неравенства:
а) $|x-0{,}5| < 3$; б) $|x-3| < 1$; в) $|x+2| < 5$.

226*. Укажите на координатной оси все решения неравенства:
а) $|x-0{,}5| < 3$; б) $|x+2{,}5| < 1$; в) $|2x-1| < 2$.

227*. Решите неравенство:
а) $|x-1| < 1$; б) $|x+1| < 2$; в) $|2x+1| < 4$; г) $|3x-2| < 5$.

Например: $|2x-1| < 3$.
$-3 < 2x - 1 < 3$, $-2 < 2x < 4$, *так как* $2 > 0$, *то* $-1 < x < 2$.
Ответ: $(-1; 2)$.

228*. Решите неравенство:
а) $|x-1| > 1$; б) $|x+1| > 2$; в) $|1+2x| \geqslant 3$; г) $|7x-3| > 1$.

229. При каких значениях x значения функции $y = 5x - 3$:
а) больше 1; б) меньше 5;
в) не меньше -2; г) не больше -5?

230*. Найдите все значения t, при которых уравнение имеет два различных корня:
а) $x^2 - 6x + t = 0$; б) $(t+3)x^2 + 2(t-1)x + t = 0$.

231*. Найдите все значения t, при которых уравнение не имеет действительных корней:
а) $x^2 + 4x + 6t = 0$; б) $tx^2 - 2(t-2)x + t = 0$.

232*. Найдите все значения t, при которых квадратное уравнение $2x^2 - 5x - t = 0$ имеет два положительных различных корня.

233. Покажите при помощи графика, что уравнение $x^2 - 2x + t = 0$:
а) при любом $t < 0$ имеет два действительных корня разных знаков, при этом абсолютная величина положительного корня больше абсолютной величины отрицательного корня;
б) при любом $0 < t < 1$ имеет два различных положительных корня;
в) при любом $t > 1$ не имеет действительных корней.

234*. При каких значениях a уравнение $x^2 + ax + 4 = 0$ имеет различные корни?

235*. При каких значениях m уравнение не имеет действительных корней:
а) $2x^2 - 3mx + 1 = 0$; б) $3mx^2 - x + m = 0$;
в) $(m+1)x^2 + mx + 3 + m = 0$?

236. На рисунке 42 изображены графики двух квадратичных функций, обозначенных y_1 и y_2. При каких x выполняются неравенства:

а) $y_1 \cdot y_2 > 0$; б) $\frac{y_2}{y_1} < 0$?

237. При каких значениях m уравнение имеет два равных положительных корня; два равных отрицательных корня:

а) $3x^2 + 4mx + 1 = 0$; б) $mx^2 - (m + 1)x + 2 = 0$?

238. При каких значениях t уравнение $x^2 - 2tx + t^2 - 1 = 0$ имеет два различных корня, заключенные в интервале:

а) $(0; 3)$; б) $(1; 4)$; в) $(-4; 0)$; г) $(-5; -2)$?

239. При каких значениях t уравнение $(t + 1)x^2 + 2(t - 1)x + t - 3 = 0$ имеет два действительных корня:

а) отрицательных; б) положительных;

в) разных знаков, причем положительный корень имеет бо́льшую абсолютную величину;

г) разных знаков, причем отрицательный корень имеет бо́льшую абсолютную величину?

240. Напишите какое-либо неравенство второй степени с одним неизвестным, решение которого может быть проиллюстрировано: а) рисунком 43, *а*; б) рисунком 43, *б*.

241°. Решите уравнение:

а) $(x - 2)(x - 1)(x - 3) = 0$; б) $(x + 1)(x + 2)(x - 5) = 0$;

в) $(2x - 3)(4 - 3x) = 0$; г) $(5x - 1)(2x + 7) = 0$.

242. Решите неравенство:

а) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 5} > 0$; б) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x + 3} < 0$;

в) $\frac{3 - x - 2x^2}{x^2 - 36} > 0$; г) $\frac{1{,}8}{x^3 - x^2 + x - 1} < 0$.

243*. При каких значениях m уравнение $(m - 2)x^2 + (m + 2)x + m = 0$ имеет различные корни?

244. Запишите с помощью неравенства утверждение, что знаки чисел a и b:

а) различные; б) одинаковые.

245*. При каких значениях p один из корней квадратного уравнения $x^2 + px - 5 = 0$ больше 1, а другой меньше 1?

246*. На рисунке 44 изображены парабола $y = ax^2 + bx + c$ и параллельные прямые m и l, пересекающие параболу в точках A и B, C и D соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AB и CD, параллельна оси Oy.

247. Упростите выражение и найдите его значение при заданном значении буквы:

а) $\left(\frac{m^3 + 1}{m + 1} - m\right) : (1 - m^2) - \frac{m}{1 + m}$ при $m = -\frac{1}{3}$;

б) $\left(\frac{a^3 - 8}{a - 2} + 2a\right) : (4 - a^2) - \frac{a - 1}{2 - a}$ при $a = \frac{2}{5}$.

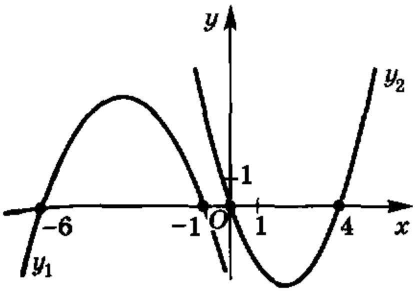


Рис. 42

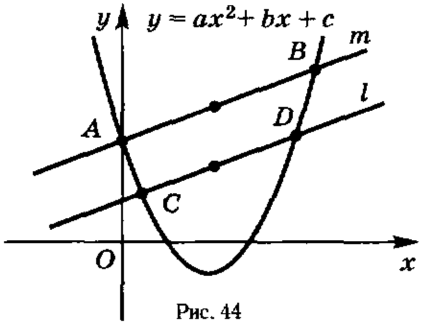
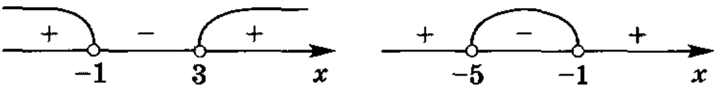


Рис. 44



а) б)

Рис. 43

248. Докажите алгебраическое равенство:

а) $\frac{5x}{x+y}\cdot\left(\frac{xy+y^2}{5x-5y}+xy+y^2\right)-\frac{xy}{x-y}=5xy;$

б) $\frac{a-5}{6-3a}+\frac{4(a+1)}{a^2+4a}:\left(\frac{9a}{a^2-16}-\frac{a+4}{a^2-4a}\right)=\frac{1}{6}.$

249. Докажите, что значение дроби равно нулю:

а) $\frac{(1{,}08-1{,}33)\cdot 18+0{,}6:\frac{2}{15}}{20{,}1\cdot 0{,}1-2{,}1};$ б) $\frac{(2{,}14-1{,}39)\cdot 1{,}2-0{,}75:\frac{5}{6}}{12{,}1:0{,}1-1{,}2}.$

250. Докажите, что выражения:

а) $\frac{(x-3)^3}{2}-\frac{(x+3)^3}{2}$ и $-\frac{9(x^2+3)}{4};$

б) $\left(\frac{x-3}{3}\right)^3+\left(\frac{x+3}{3}\right)^3$ и $\frac{x(x^2+27)}{27}$

не являются тождественно равными на множестве всех действительных чисел.

Упростите выражение **(251—254)**:

251. а) $\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x}{x+y}\right):\frac{xy}{x^2-y^2};$ б) $\left(\frac{m+1}{m-1}-\frac{m-1}{m+1}+4m\right)\left(m-\frac{1}{m}\right).$

252. а) $\left(\frac{y}{x-y}+\frac{x}{x+y}\right)\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2\right);$ б) $\left(\frac{x^2y-y^2x}{x-y}+xy\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{y}\right).$

253. а) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x-y)+(x+y)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right);$

б) $\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right):\left(2-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right):\left(\frac{y}{x}+1\right).$

254. а) $\left(\frac{k+1}{k-1}-\frac{k-1}{k+1}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{4}-\frac{1}{4k}\right);$ б) $\frac{m^3+m^2n+mn^2+n^3}{m^2+2mn+n^2}:\frac{m^4-n^4}{(m+n)^3}.$

255. Докажите, что число $(10^{27} + 5)$ делится нацело на 3.

Решите уравнение **(256—260)**:

256. а) $\frac{x+3}{x^2-x} - \frac{x+5}{x+x^2} = \frac{x-6}{1-x^2}$;

б) $\frac{5x}{3x+1} - \frac{1}{9x+3} = 1\frac{1}{6}$.

257. а) $\frac{1}{2x+x^2+1} + \frac{4}{x+2x^2+x^3} = \frac{5}{2x+2x^2}$;

б) $\frac{7}{6x+30} + \frac{3}{4x-20} = \frac{15}{2x^2-50}$.

258. а) $\frac{2x^2-3x+x^3}{x^2-2x+1} = 0$; б) $\frac{x(1-x)}{1+x} = 6$;

в) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{2+x}{x^2-1}$; г) $\frac{1}{x+1} + \frac{5}{x-1} = \frac{5+x}{x^2-1}$.

259. а) $\frac{2}{x^2-10x+25} - \frac{1}{x+5} = \frac{10}{x^2-25}$;

б) $\frac{2}{x^2+12x+36} - \frac{1}{x-6} = \frac{12}{x^2-36}$.

260*. а) $\frac{1}{x-8} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+8} = 0$;

б) $\frac{3}{x-2} - \frac{4}{x-1} = \frac{1}{x-4} - \frac{2}{x-3}$.

Решите систему уравнений **(261—265)**:

261. а) $\begin{cases} 2x+3y = 4, \\ 4x-6y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9x-10y = 3, \\ 2x-3y = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x+4y = 6, \\ 7x+6y = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x+3y = 15, \\ 10x-6y = 0. \end{cases}$

262. а) $\begin{cases} x^2+y = 4, \\ x+y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y = 5, \\ x+y^2 = 13. \end{cases}$

263. а) $\begin{cases} xy(x+y) = 6, \\ x^3+y^3 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y = 2, \\ x^2+y^2-2 = 0. \end{cases}$

264. а) $\begin{cases} \frac{y-3}{x+2} = \frac{1}{3}, \\ xy+3x+4y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{y-1} + \frac{y-1}{x} = 2, \\ 2x-3y = 5. \end{cases}$

265. а) $\begin{cases} x+xy+y = 11, \\ x^2y+xy^2 = 30; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+xy+y^2 = 4, \\ x+xy+y = 2. \end{cases}$

266. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 7x$; б) $y = 3 - x^2$;

в) $y = x^2 - 5x - 6$; г) $y = 3x^2 - x + 1$.

267. Решите графическим способом систему уравнений:

а) $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = x + 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = -x - 2, \\ y = 4 - x^2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = x^2 - 1, \\ y = 1 - x^2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y = 2x - 1, \\ y = 2x^2 - 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1, \\ y = \frac{1}{x}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y = -x^2, \\ y = -\frac{8}{x}. \end{cases}$

268. Трое рабочих выполняют одинаковую работу: первый за 12 ч, второй за 15 ч, третий за 20 ч. Сколько часов затратят рабочие на выполнение этой работы совместно?

269*. Две бригады, работая вместе, могут отремонтировать шоссе за 18 рабочих дней. Если первая бригада, работая одна, выполнит $\frac{2}{3}$ всей работы, а вторая бригада — оставшуюся часть, то на ремонт шоссе понадобится 40 дней. За сколько дней каждая бригада, работая отдельно, может выполнить всю работу?

270. Три тракторные бригады вместе вспахивают поле за 4 дня. Первая и вторая бригады вместе могут вспахать это поле за 6 дней, а первая и третья вместе — за 8 дней. Какая бригада — вторая или третья — может вспахать больше за день и во сколько раз?

271. На первом участке пути в 96 км поезд шел со скоростью на 2 км/ч большей, чем на втором участке в 69 км. Весь путь был пройден за 3 ч 30 мин. Определите скорость поезда на втором участке пути.

272. Моторная лодка, собственная скорость которой 20 км/ч, прошла расстояние между двумя пунктами на реке туда и обратно, не останавливаясь, за 6 ч 15 мин. Расстояние между пунктами равно 60 км. Определите скорость течения реки.

273. Для перевозки 75 т груза выделили несколько грузовиков. Однако 5 грузовиков перевели на другой участок, поэтому в каждый из оставшихся грузовиков пришлось погрузить на 0,5 т груза больше, чем предполагалось. Сколько грузовиков использовалось в перевозке груза?

274. Если поезд, идущий из города A в город B, уменьшит скорость движения на 10 км/ч, то время, за которое он пройдет расстояние от A до B, увеличится на 25%. Определите скорость движения поезда.

275*. Сопротивление цепи двух параллельно соединенных проводников равно 15 Ом. Первый проводник имеет сопротивление на 16 Ом больше, чем второй. Определите сопротивление каждого проводника.

276* На термометре Цельсия температуры таяния льда и кипения воды обозначаются соответственно 0° и 100°. На термометре Фаренгейта эти температуры обозначены соответственно

$-32°$ и $212°$. При какой температуре оба термометра будут показывать одинаковое число градусов?

277*. Для производства одного электродвигателя типа A используется 2 кг сплава, содержащего 20% свинца и 80% меди. Для производства одного электродвигателя типа B используется 2 кг сплава, содержащего 60% свинца и 40% меди. Прибыль от производства одного электродвигателя типа A или типа B составляет соответственно 8 р. или 12 р. Сколько нужно изготовить электродвигателей каждого типа, чтобы получить 1000 р. прибыли, израсходовав при этом не более 84 кг свинца и не более 111 кг меди?

278. Найдите такие четыре числа, чтобы суммы, образованные тремя из них, были соответственно равны 20, 22, 24, 27.

279. Суммы сторон четырехугольника, взятых последовательно по 3, равны соответственно 130, 135, 147, 152 см. Определите длину каждой стороны четырехугольника.

280. По окружности длиной 100 м движутся две точки. При движении в одном и том же направлении они встречаются каждые 20 с, а при движении в противоположных направлениях они встречаются каждые 4 с. Определите скорость каждой точки.

281. На 720 р. должны были приобрести несколько радиоприемников, но цена каждого из них снизилась на 24 р., поэтому купили на один радиоприемник больше, чем планировалось. Сколько купили радиоприемников, если их цена одинаковая?

282. При постройке здания требовалось вынуть 8000 $м^3$ земли в определенный срок. Работа была закончена раньше срока на 8 дней, так как бригада ежедневно перевыполняла план на 50 $м^3$. Определите, в какой срок должна была быть выполнена работа, и определите ежедневный процент выполнения плана.

283. Бригада трактористов должна была вспахать участок целины площадью 120 га. Однако бригаде удалось увеличить норму дневной выработки на 2 га. В результате срок вспашки сократился на 2 дня. Каково было дневное задание бригаде и в какой срок нужно было выполнить работу?

284. Бригада лесорубов должна была в несколько дней по плану заготовить 216 $м^3$ дров. Первые три дня бригада работала по плану, а затем каждый день заготовляла на 8 $м^3$ дров больше плана. В результате уже за день до срока было заготовлено 232 $м^3$ дров. Сколько кубометров должна была заготовлять бригада в день по плану?

285. Автомобиль с грузом проехал 140 км с некоторой постоянной скоростью. На обратном пути, двигаясь порожняком, автомобиль увеличил скорость на 20 км/ч. В результате на обратный путь он затратил на 48 мин меньше. Определите первоначальную скорость автомобиля.

286. Из винтовки произведен выстрел вверх. Скорость пули при вылете из ствола винтовки равна 800 м/с. Считая, что выстрел произведеи при $t = 0$ в точке $s = 0$ оси Os, напишите закон двнжеиия пулн в случае, если:

а) ось Os направлена вверх; б) ось Os направлена вннз.

287. С какой высоты падала на землю (начальная скорость равна 0 м/с) матернальная точка, еслн ее паденне продолжалось 5 с? Сопротивлением воздуха пренебречь.

288. Сколько временн будет падать на землю матернальная точка с высоты 10 000 м? Ответ дайте прнближенно с точностью до 1 с. Сопротнвлением воздуха пренебречь.

289. Материальная точка падает на землю по закону $h = 5t^2$ (h измеряется в метрах, t — в секундах). Определите прнблнженно среднюю скорость точкн за промежуткн временн между:

а) $t_1 = 0$ н $t_2 = 0{,}1$; б) $t_1 = 1$ н $t_2 = 1{,}1$;

в) $t_1 = 2$ и $t_2 = 2{,}1$; г) $t_1 = 3$ н $t_2 = 3{,}1$.

290. Закон прямолниейиого двнжения матернальной точкн задан формулой:

а) $s = 5t^2,\ t \geqslant 0$; б) $s = 10t + 5t^2,\ t \geqslant 0$;

в) $s = 10t - 5t^2,\quad t \geqslant 0$.

1) Нарнсуйте графнк движення.

2) Определите s в момент временн $t = 0$.

3) Определнте скорость точкн в момент времени $t = 0$.

4) Укажите, в какую стороиу направлена сила, действующая на точку.

291. Матернальная точка двнжется с поверхностн землн вертикально вверх с начальной скоростью 20 м/с. Сколько временн точка будет находиться в движении н на какую высоту от поверхностн землн она поднимется? Сопротнвленнем воздуха пренебречь.

292. С поверхности земли вертикально вверх брошен камень с начальной скоростью v_0 (м/с). Через сколько секунд камень упадет на землю? Сопротнвленнем воздуха пренебречь. Решнте задачу, еслн: а) $v_0 = 15$ м/с; б) $v_0 = 25$ м/с.

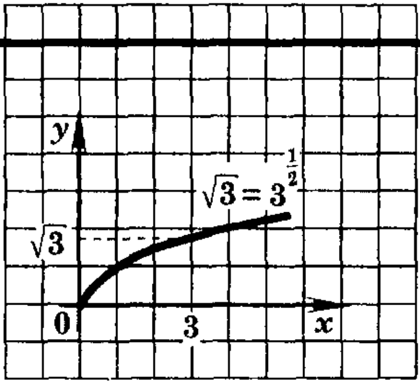
293*. Спелеолог для выяснеиия глубины подземной полостн броснл вннз без начальной скоростн камень. Звук от падення камня на дно полости дошел до спелеолога через 3 с. Какова глубнна подземной полостн, еслн прннять скорость звука равной 330 м/с и преиебречь сопротнвленнем воздуха?

294*. Парашютнст покннул летящнй самолет иа высоте 3 км н через 3 мни прнземлился. Определите время его снНжения до раскрытня парашюта н с раскрытым парашютом, если средняя скорость снНження с раскрытым парашютом равна 6 м/с. Сопротнвленнем воздуха прн снНженнн без парашюта пренебречь.

295. *Задача-шутка.* В некотором царстве, в некотором государстве Ива́нов в иесколько раз больше, чем Петров. Кого в этом царстве-государстве больше:

а) Иванов Ивановнчей нлн Петров Петровнчей;

б) Иванов Петровичей или Петров Ивановнчей?



ГЛАВА II

СТЕПЕНЬ ЧИСЛА

§ 4. КОРЕНЬ СТЕПЕНИ n

4.1. Свойства функции $y=x^n$

Функции $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^4$, ... имеют ряд одинаковых свойств. Поэтому в общем случае рассматривают функцию

$$y=x^n, \qquad (1)$$

где n ($n \geqslant 2$) — некоторое данное натуральное число.

Функция $y=x^n$ определена для любых x, т. е. область определения этой функции есть множество $\boldsymbol{R}$.

Как мы знаем, график функции $y=x^2$ называют параболой. Теперь мы назовем этот график **параболой второй степени.**

График функции

$$y=x^n \quad (n \geqslant 2)$$

называют параболой n-й степени или, коротко, параболой $y=x^n$.

Отметим *свойства* функции $y=x^n$ ($n \geqslant 2$) пока только для неотрицательных x.

1) **Если $x=0$, то $y=0$.**
2) **Если $x=1$, то $y=1$.**
3) **Если $x>0$, то $y>0$.**
4) **Функция $y=x^n$ является возрастающей для неотрицательных x.**
5) **Если $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$.**
6) **Функция $y=x^n$ непрерывна.**

Свойства 1 и 2 непосредственно следуют из формулы (1). Геометрически они означают, что парабола $y=x^n$ проходит через начало координат и точку (1; 1).

Свойство 3 следует из того, что если $x>0$, то $x^n>0$. Свойство 3 означает, что парабола $y=x^n$ для $x>0$ расположена выше оси Ox.

Свойство 4 следует из того, что если $0 \leqslant x_1 < x_2$, то $x_1^n < x_2^n$, Свойство 5 очевидно. В самом деле, если x стремится к $+\infty$, пробегая натуральные числа 1, 2, 3, 4, ..., то $y = x^n$ тоже стремится к $+\infty$, пробегая числа 1^n, 2^n, 3^n, ... Для остальных чисел x справедливость этого свойства сохраняется.

Свойство 6 для $n = 2$ становится очевидным, если, например, считать, что y есть площадь квадрата со стороной x. Ясно, что малое изменение стороны квадрата влечет за собой малое изменение площади, а это и означает непрерывность функции $y = x^2$ для положительных x.

Для $n = 3$ свойство 6 также становится очевидным, если, например, считать, что y есть объем куба со стороной x. Ясно, что малое изменение стороны куба влечет за собой малое изменение его объема, а это и означает непрерывность функции $y = x^3$ для положительных x.

Для других n свойство 6 надо доказывать, но это доказательство мы проводить не будем.

Свойство 6 означает, что график функции $y = x^n$ — непрерывная линия.

З а м е ч а н и е. Доказательства свойств 3 и 4 требуют применения метода математической индукции (см. п. 1 Дополнений к главе III).

296°. Как называют график функции $y = x^n$?

297°. Возрастает ли функция $y = x^n$ для неотрицательных x?

298°. Дана функция $y = x^n$. К чему стремится y при $x \to +\infty$?

299. Как изменяется x^n с увеличением натурального показателя n при фиксированном x, если:
а) $0 < x < 1$; б) $x > 1$; в) $x = 1$; г) $x = 0$?

300. Функция задана формулой $y = x^3$.
а) Назовите зависимую и независимую переменные.
б) Какова область определения данной функции?
в) Вычислите для данной функции значения $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$, $y(3)$, $y(0{,}5)$, $y\left(\frac{1}{3}\right)$, $y\left(2\frac{1}{2}\right)$. Решение оформите в виде таблицы.

301. Функция задана формулой $y = x^4$. Заполните таблицу значений функции при x, равном 0; 1; 2; 3; 0,5; $\frac{1}{3}$; 0,25; 1,5.

302. Функция задана формулой $y = x^5$. Верно ли равенство:
а) $y(1) = 5$; б) $y(1) = 1$; в) $y(2) = 32$; г) $y(0) = 0$?

303. Составьте таблицу значений объема куба, если длина его ребра (в метрах) принимает значения от 0,2 до 2 через 0,2.

304. а) Дана функция $y = x^4$. При каких значениях x значения функции равны 0; 1; 4; 16?
б) Дана функция $y = x^3$. При каких значениях x значения функции равны 0; 1; 8; 64?

305. При каких значениях x выполняется неравенство $y_1(x) < y_2(x)$, если:
а) $y_1(x) = x^6$, $y_2(x) = x^3$; б) $y_1(x) = x^5$, $y_2(x) = x^2$?

4.2. График функции $y = x^n$

На рисунке 45 в одной н той же декартовой системе координат нзображены графикн функций

$$y = x^2,\ y = x^3,\ y = x^4 \qquad (1)$$

пока только для неотрнцательных значений x ($x \geqslant 0$). Этн графнкн отражают отмеченные в предыдущем пункте свойства функцнй (1).

Сделаем пояснення к рисунку 45.

На ннтервале (0; 1), т. е. для значеннй x, для которых

$$0 < x < 1,$$

выполняются неравеиства

$$1 > x > x^2 > x^3 > x^4 > \ldots . \qquad (2)$$

Действительно, умножая иеравенство $1 > x$ на x, где x — положительное число, получим неравенство $x > x^2$; умножая это неравенство иа $x > 0$, получим иеравеиство $x^2 > x^3$ и т. д.

В снлу неравенств (2) график функции $y = x^3$ на ннтервале (0; 1) расположеи ннже графика функции $y = x^2$, графнк функции $y = x^4$ расположен ннже графнка функции $y = x^3$ и т. д.

Далее, на ннтервале (1; + ∞), т. е. для значений x, для которых $1 < x$, выполняются неравенства

$$1 < x < x^2 < x^3 < \ldots . \qquad (3)$$

Действительно, умножая неравенство $1 < x$ на положнтельиое число x, получнм иеравенство $x < x^2$. Умножая это неравенство на x ($x > 0$), получнм неравенство $x^2 < x^3$ и т. д.

Неравенства (3) показывают, что на иитервале (1; +∞) графнк функцин $y = x^3$ расположен выше графнка функцнн $y = x^2$, график функцни $y = x^4$ расположен выше графнка фуикции $y = x^3$ и т. д.

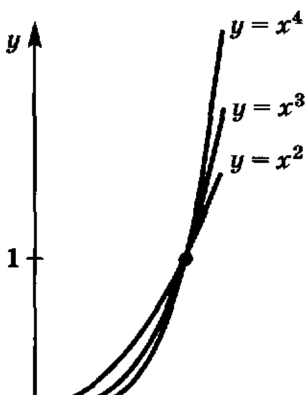


Рис. 45

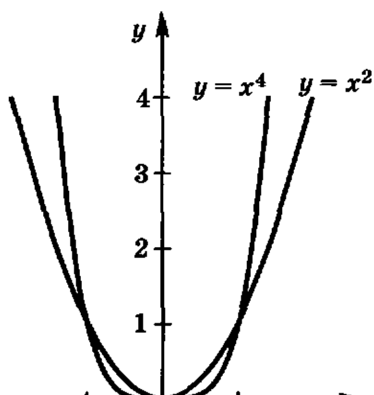


Рис. 46

Рассмотрим теперь свойства функции $y = x^n$ на всей области ее определения, т. е. для x, принадлежащих интервалу $(-\infty; +\infty)$.

Очевидно, что

$$(-x)^2 = x^2,\ (-x)^4 = x^4,\ (-x)^6 = x^6.$$

Вообще если $n = 2m$ $(m \in N)$ есть четное натуральное число, то

$$(-x)^{2m} = x^{2m}.$$

Действительно,

$$(-x)^{2m} = (-1 \cdot x)^{2m} = (-1)^{2m} \cdot x^{2m} = $$
$$= ((-1)^2)^m \cdot x^{2m} = 1^m \cdot x^{2m} = x^{2m}.$$

Следовательно, *функция $y = x^n$ при четном n четная и график ее симметричен относительно оси Oy.*

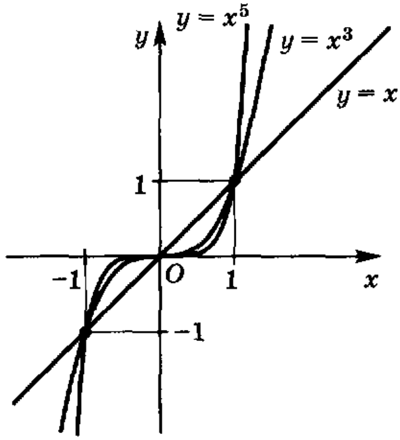


Рис. 47

На рисунке 46 изображены графики функций $y = x^2$ и $y = x^4$ для любых действительных значений x.

Для степенных функций с нечетными степенями выполняются уже другие равенства:

$$(-x)^3 = -x^3,\ (-x)^5 = -x^5,\ (-x)^7 = -x^7.$$

Вообще если $n = 2m + 1$ $(m \in N)$ есть нечетное натуральное число, то

$$(-x)^{2m+1} = -x^{2m+1}.$$

Действительно,

$$(-x)^{2m+1} = (-x)^{2m}(-x) = x^{2m}(-1)\,x = -x^{2m+1}.$$

Следовательно, *функция $y = x^n$ при нечетном n нечетная и график ее симметричен относительно начала координат.*

На рисунке 47 изображены графики функций $y = x$, $y = x^3$ и $y = x^5$ для любых действительных значений x.

Отметим, что если $n = 2m$ $(m \in N)$ — четное натуральное число, то функция $y = x^{2m}$ является убывающей на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастающей на промежутке $[0; +\infty)$. Для всех x эта функция принимает все значения из промежутка $[0; +\infty)$.

Если $n = 2m + 1$ $(m \in N)$ — нечетное натуральное число, то функция $y = x^{2m+1}$ является возрастающей на интервале $(-\infty; +\infty)$. Эта функция принимает все значения из интервала $(-\infty; +\infty)$.

306°. Для каких натуральных значений n функция $y = x^n$ четная?

307°. Для каких натуральных значений n функция $y = x^n$ нечетная?

308°. Относительно чего симметричен график функции $y = x^n$:

а) при n четном; б) при n нечетном?

309. Функция задана формулой $y = x^3$. Вычислите значения $y(0)$, $y(1)$, $y(-1)$, $y(-2)$, $y\left(\frac{1}{2}\right)$, $y(-0{,}5)$, $y\left(\frac{1}{3}\right)$, $y\left(-\frac{1}{3}\right)$. Решение оформите в виде таблицы.

310. Функция задана формулой $y = x^4$. Заполните таблицу значений функции при x, равном 0; 1; -1; 2; -2; 3; -3; $\frac{1}{2}$; $-0{,}5$; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $-0{,}25$; $1\frac{1}{2}$; $-1\frac{1}{2}$.

311. Функция задана формулой $y = x^5$. Верно ли равенство:
а) $y(1) = 5$; б) $y(-1) = -1$; в) $y(0) = 0$; г) $y(-2) = 32$?

312. Вычислите значения функции $y = x^3$, взяв x от -1 до 1 через 0,2. Решение оформите в виде таблицы.

313. При каких значениях аргумента значение функции:
а) $y = x^4$ равно 0; 1; -1; 16;
б) $y = x^3$ равно 0; 1; -1; -8; 64?

314. Какова область значений функции: а) $y = x^4$; б) $y = x^3$?

315. Дана функция $y = x^3$.
а) Какие значения принимает данная функция, если $x \geqslant 0$, $x < 0$?
б) В каких четвертях расположен график данной функции? Ответ обоснуйте.
в) Является ли данная функция четной (нечетной)? Ответ обоснуйте.
г) Покажите, что данная функция возрастает на интервале $(-\infty; +\infty)$.
д) Постройте точки $(x; x^3)$, взяв x от $-1{,}5$ до 1,5 через 0,5.
е) Постройте в той же системе координат точки $(x; x^3)$, взяв x от $-0{,}5$ до 0,5 через 0,2.
ж) Учитывая непрерывность функции $y = x^3$, постройте ее график.
з) Укажите с помощью графика функции $y = x^3$, при каких x значения функции больше 1; меньше -1.

316. Дана функция $y = x^4$. Исследуйте эту функцию по схеме предыдущего задания и постройте ее график.

317. Учитывая четность (нечетность) функции, постройте ее график (для построения графика достаточно определить четверти, в которых он расположен, и примерное его расположение с помощью нескольких точек):
а) $y = x^6$; б) $y = x^7$; в) $y = x^8$;
г) $y = x^9$; д) $y = x^{10}$; е) $y = x^4$.

318. Постройте график функции:
а) $y = x^{20}$; б) $y = x^{100}$.

319. Принадлежит ли графику функции $y = x^5$ точка:
а) $A(-1; -1)$; б) $B(2; 64)$?

320. Принадлежит ли графику функции $y = x^6$ точка:
а) $A(-2; 64)$; б) $B(-1; 1)$?

321. В одной системе координат постройте графики функций $y = x^4$ и $y = x^3$.

а) Какие значения принимают эти функции, если $x > 0$, $x > 1$, $x > 2$, $0 < x < 2$?

б) При каких значениях x значения каждой из данных функций больше 0; меньше 0; больше 1; меньше 1?

в) Существуют ли такие значения x, при которых значения функции $y = x^3$ больше соответствующих значений функции $y = x^4$?

г) При каких значениях x каждая из данных функций является возрастающей; убывающей?

322. В одной системе координат с единичными отрезками 10 см на интервале $(-1; 1)$ постройте графики функций $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$.

323. Сравните значения функций $y = x$ и $y = x^5$ при значениях аргумента:

а) $0 < x < 1$; б) $x > 1$; в) $-1 < x < 0$; г) $x < -1$.

324. Сравните значения функций $y = x^4$ и $y = x^6$ при значениях аргумента:

а) $x > 1$; б) $x < -1$; в) $-1 < x < 0$; г) $0 < x < 1$.

325. Дана функция $y = x^{12}$. Что больше:

а) $y(1)$ или $y(2)$; б) $y(-2)$ или $y(-1)$;
в) $y(-3)$ или $y(3)$; г) $y(0)$ или $y(5)$?

326. Дана функция $y = x^9$. Сравните:

а) $y(-1)$ и $y(1)$; б) $y(-2)$ и $y(0)$;
в) $y(4)$ и $y(-5)$; г) $y(6)$ и $y(3)$.

327. Сравните с единицей значения функции $y = x^{18}$:

а) $y(0{,}5)$; б) $y\left(\frac{1}{3}\right)$; в) $y(-2)$;
г) $y(6)$; д) $y(0)$; е) $y(-1)$.

4.3. Понятие корня степени n

Пусть n есть натуральное число и $n \geqslant 2$.

Корнем степени n из числа a называют такое число (если оно существует), n-я степень которого равна a.

Мы уже знаем, что корень степени 2 называют также *квадратным корнем*. Корень степени 3 называют еще *кубическим корнем*.

Пример 1. Равенства

$0^3 = 0$, $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$,
$(-1)^3 = -1$, $(-2)^3 = -8$, $(-3)^3 = -27$

показывают, что числа -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 есть кубические корни соответственно из чисел -27, -8, -1, 0, 1, 8, 27.

Пример 2. Равенства

$0^5 = 0$, $1^5 = 1$, $2^5 = 32$, $3^5 = 243$,
$(-1)^5 = -1$, $(-2)^5 = -32$, $(-3)^5 = -243$

показывают, что числа -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 есть корни степени 5 соответственно из чисел -243, -32, -1, 0, 1, 32, 243.

Таким образом, показано, что существуют корни 3-й и 5-й степеней из действительных чисел.

Пример 3. Равенства

$0^4 = 0, \ 1^4 = 1, \ 2^4 = 16, \ 3^4 = 81,$

$(-1)^4 = 1, (-2)^4 = 16, (-3)^4 = 81$

показывают, что есть два числа $+1$ и -1, которые являются корнями четвертой степени из 1; есть два числа $+2$ и -2, являющиеся корнями четвертой степени из 16; есть также два числа $+3$ и -3, являющиеся корнями четвертой степени из 81. Далее, 0 есть корень четвертой степени из 0.

Таким образом, показано, что существует корень 4-й степени из неотрицательных чисел. *Не существует корня четвертой степени из отрицательного числа,* потому что четвертая степень любого действительного числа есть число неотрицательное.

В следующем пункте будут получены общие заключения, которые согласуются с рассмотренными выше частными фактами.

328^0. Что называют: а) квадратным корнем; б) кубическим корнем; в) корнем пятой степени; г) корнем степени n ($n \geqslant 2$, $n \in N$) из числа b?

329^0. а) Сколько существует корней 4-й степени из числа 1; 81; 0? б) Сколько существует корней пятой степени из числа 0; 1; -1?

330. Выпишите все натуральные числа, кубы которых не превышают 10 000.

331. Выпишите все целые числа, четвертые степени которых не превышают 10 000.

332. Сколько существует натуральных чисел, шестая степень которых не превышает 1 000 000?

333. Найдите ребро куба, если его объем равен:

а) 1 м^3; б) 8 см^3; в) 27 дм^3;
г) 64 мм^3; д) 1000 км^3; е) 1 000 000 м^3.

334^0. Найдите число, куб которого равен:

а) -1; б) -8; в) 0,001; г) $\frac{1}{27}$.

335. Докажите, что число:

а) 3 есть корень третьей степени из 27;
б) $-0{,}5$ есть корень четвертой степени из 0,0625;
в) 7 — корень четвертой степени из 2401;
г) $-1\frac{1}{3}$ — корень третьей степени из $-2\frac{10}{27}$.

336. Определите кубический корень из числа:

а) 1000; б) 64 000 000; в) 125 000 000 000;
г) $-0{,}001$; д) $3\frac{3}{8}$; е) $-1\frac{61}{64}$.

Докажите правильность решения.

337. Найдите корень четвертой степени из числа:

а) 0; б) 160 000; в) 62 500 000 000;

г) $-0{,}0001$; д) $1 \cdot 10^{-8}$; е) $1{,}6 \cdot 10^{-3}$.

Докажите правильность решения.

338. Существует ли корень шестой степени из данного числа и единственный ли это корень:

а) 1; б) 0; в) -1; г) 1,2; д) $-1{,}8 \cdot 10^{6}$; е) $7{,}2 \cdot 10^{-6}$?

339. Всегда ли существуют два корня четной степени из одного и того же неотрицательного числа?

340. Проверьте, является ли число:

а) 6 корнем шестой степени из 46 656;

б) -3 корнем седьмой степени из 2187;

в) -3 корнем седьмой степени из -2187;

г) $-0{,}4$ корнем пятой степени из $\frac{32}{3125}$.

4.4. Корни четной и нечетной степеней

Теорема 1. *Существует, и притом единственный, корень нечетной степени из любого действительного числа a, при этом корень нечетной степени: а) из положительного числа есть число положительное; б) из отрицательного числа есть число отрицательное; в) из нуля есть нуль.*

Доказательство. Применим графический метод. Отметим, что любое нечетное число, большее 1, можно записать в виде $2m + 1$, где m — натуральное число.

Построим в прямоугольной системе координат xOy график функции $y = x^{2m+1}$ (рис. 48). Это есть непрерывная кривая, проходящая через начало координат, симметричная относительно начала координат. Для каждой точки этой кривой при возрастании ее абсциссы x от $-\infty$ до $+\infty$ ее ордината y тоже возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

Зададим произвольное число a. Через точку $B(0; a)$ проведем прямую $y = a$, параллельную оси Ox. Она пересекает параболу $y = x^{2m+1}$

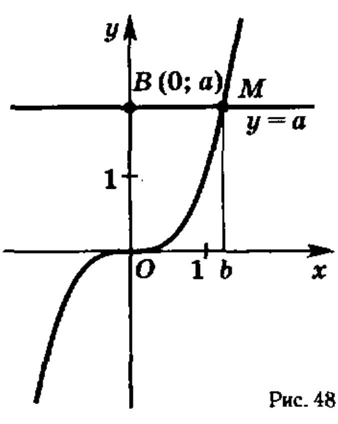


Рис. 48

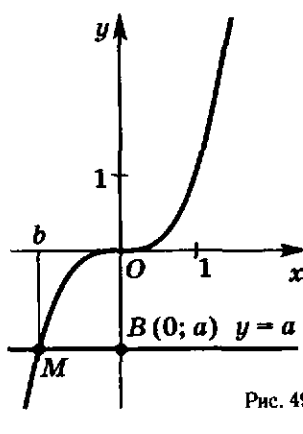


Рис. 49

в одной и только в одной точке M. Точка M имеет ординату $y = a$. Обозначим ее абсциссу через $x = b$.

Таким образом, полученное число b есть единственное, для которого выполняется равенство $b^{2m+1} = a$.

Если $a > 0$, то $b > 0$ (рис. 48).

Если $a < 0$, то $b < 0$ (рис. 49).

Накоиец, если $a = 0$, то и $b = 0$.

Итак, показано, что для любого действительного числа a существует, и притом один, корень степени $(2m + 1)$, он обозначается так: $\sqrt[2m+1]{a}$.

Теорема 1 доказана.

Примеры.

$$\sqrt[3]{8} = 2, \qquad \sqrt[3]{-8} = -2,$$
$$\sqrt[5]{100\,000} = 10, \qquad \sqrt[5]{-100\,000} = -10.$$

Т е о р е м а 2. *Существуют два и только два корня четной степени из любого положительного числа, которые отличаются только знаками. Корень четной степени из 0 единственный, равный нулю. Корня четной степени из отрицательного числа не существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что всякое положительное четиое число можно записать в виде $2m$, где m — натуральное число. Если любое число, отличиое от иуля, возвести в четную степеиь $2m$, то получится положительное число. Если же нуль возвести в степеиь $2m$, то получится иуль. Это и доказывает, что корень степеии $2m$ из иуля единственный, равный иулю и что кория четной степени из отрицательного числа не существует.

Чтобы доказать первое утверждение теоремы, прнменим графический метод.

Рассмотрим график функции

$$y = x^{2m}. \qquad (1)$$

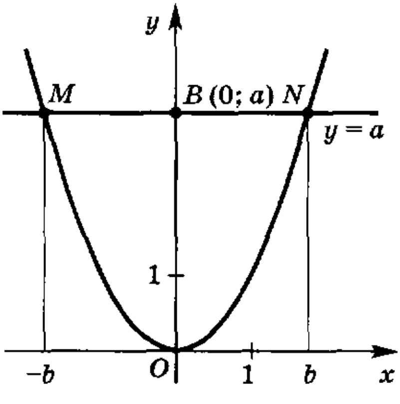


Рис. 50

Это непрерывная кривая, проходящая через начало координат, симметричная отиосительно оси Oy (рис. 50). Для точки этой кривой при возрастании ее абсциссы x от 0 до $+\infty$ ее ордината y также возрастает от 0 до $+\infty$.

Зададим произвольиое положительное число a $(a > 0)$. Через точку $B(0; a)$ проведем прямую, параллельную оси Ox. Эта прямая пересекает параболу $y = x^{2m}$ в двух и только в двух точках M и N, нмеющих одиу и ту же ордииату a. Абсциссы их в силу симметричности графика относительно оси Oy имеют противоположные знаки. Точка N имеет положительную абсциссу, обозначим ее через b ($b > 0$). Тогда точка M имеет отрицательную абсциссу, равную $(-b)$.

Очевидно, что $b^{2m} = (-b)^{2m} = a$.

Итак, показано, что существуют два и только два корня степени $2m$ из любого положительного числа a. Один из них b — положительный — обозначают так: $\sqrt[2m]{a}$. Другой, отрицательный корень степени $2m$ из a ($a > 0$) обозначают так: $(-\sqrt[2m]{a})$.

Корень степени $2m$ из числа 0 (как показано выше, единственный, равный 0) обозначают так: $\sqrt[2m]{0} = 0$.

Теорема 2 доказана.

Примеры.

$$\sqrt[4]{16} = 2, \qquad \sqrt[6]{1\,000\,000} = 10, \qquad \sqrt{0} = 0,$$
$$-\sqrt[4]{16} = -2, \qquad -\sqrt[6]{1\,000\,000} = -10.$$

Замечание. Записи

$$\sqrt[4]{-16}, \qquad \sqrt[4]{-81}, \qquad \sqrt[6]{-1\,000\,000}, \qquad \sqrt[4]{-13{,}2}, \qquad \sqrt[8]{-0{,}1}$$

не имеют смысла, потому что корень четной степени из отрицательного числа не существует.

Подведем итоги. Пусть m — данное натуральное число.

Существует, и притом только один, корень степени $(2m + 1)$ из любого действительного числа a. Его обозначают так: $\sqrt[2m+1]{a}$, при этом

$$\text{если } a > 0, \text{ то } \sqrt[2m+1]{a} > 0,$$
$$\text{если } a = 0, \text{ то } \sqrt[2m+1]{a} = 0,$$
$$\text{если } a < 0, \text{ то } \sqrt[2m+1]{a} < 0.$$

Существуют два и только два корня степени $2m$ из любого положительного числа a, они отличаются только знаками.

Положительный корень обозначают так: $\sqrt[2m]{a}$, а отрицательный корень так: $(-\sqrt[2m]{a})$.

Нуль есть единственный корень степени $2m$ из числа нуль, его обозначают так: $\sqrt[2m]{0}$. Таким образом, $\sqrt[2m]{0} = 0$.

Корень степени $2m$ из отрицательного числа не существует.

Замечание. При подробном изучении комплексных чисел показывается, что корни четной степени из отрицательных чисел являются комплексными числами. Слова «корень четной степени из отрицательного числа не существует» означают, что не существует действительного числа, являющегося корнем четной степени из отрицательного числа.

341°. а) Сколько существует корней нечетной степени из любого действительного числа?

б) Может ли корень нечетной степени из положительного числа быть числом отрицательным?

в) Будет ли корень нечетной степени из отрицательного числа числом отрицательным?

г) Чему равен корень нечетной степени из нуля?

342. Как обозначают корень нечетной степени из числа a?

343°. Для любого ли действительного числа существует корень четной степени?

344°. Существует ли корень четной степени: а) из положительного числа; б) из нуля; в) из отрицательного числа?

345°. Чему равен корень четной степени из нуля?

346. Как обозначают положительный корень четной степени из положительного числа? Приведите пример.

347. Как обозначают отрицательный корень четной степени из положительного числа? Приведите пример.

348°. Почему не существует корней четной степени из отрицательного числа?

349. Покажите с помощью графика функции $y = x^3$, что существует единственный кубический корень из числа:

а) 1; б) 5; в) 0; г) -3.

350. С помощью графика функции $y = x^3$ найдите с точностью до единиц:

а) $\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[3]{7}$; в) $\sqrt[3]{-3}$; г) $\sqrt[3]{-5}$.

351°. Прочтите выражение:

а) $\sqrt[3]{5}$; б) $-\sqrt[7]{-2}$; в) $\sqrt[12]{7}$; г) $-\sqrt[5]{-7}$.

352°. Имеет ли смысл запись:

а) $\sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[3]{-5}$; в) $\sqrt[4]{5}$; г) $\sqrt[4]{-5}$; д) $\sqrt[8]{0}$; е) $\sqrt[8]{-0,1}$?

353. Верно ли равенство:

а) $\sqrt[3]{-27}=-3$; б) $\sqrt[4]{-6}=-2$; в) $\sqrt[3]{64}=-4$; г) $\sqrt[4]{625}=-5$?

354. Найдите значение выражения:

а) $(\sqrt[5]{2})^5$; б) $(\sqrt[7]{12})^7$; в) $(\sqrt[3]{-8})^3$; г) $(\sqrt[11]{-3})^{11}$.

Вычислите **(355—357)**:

355. а) $\sqrt[3]{2^3}$; б) $\sqrt[3]{5^3}$; в) $\sqrt[3]{(-4)^3}$; г) $\sqrt[3]{(-0,5)^3}$;

д) $\sqrt[5]{8 \cdot 4}$; е) $\sqrt[7]{81 \cdot 27}$; ж) $\sqrt[3]{-3,6 \cdot 0,06}$; з) $\sqrt[3]{-5 \cdot 25}$.

356. а) $\sqrt[3]{1000}$; б) $\sqrt[5]{10\,000\,000\,000}$;

в) $\sqrt[3]{3\,200\,000}$; г) $\sqrt[3]{-343\,000\,000}$.

357. а) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$; б) $\sqrt[3]{\frac{125}{216}}$; в) $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$; г) $\sqrt[3]{-5\frac{23}{64}}$.

358. При помощи графика решите уравнение:

а) $x^3 = 8$; б) $x^3 = 125$; в) $x^5 = 32$; г) $x^7 = 1$;

д) $x^3 = -27$; е) $x^5 = 2$; ж) $x^3 = -1$; з) $x^3 = -7$.

359. Покажите с помощью графика функции $y = x^4$, что:
а) существуют два действительных корня четвертой степени из числа 3;
б) существует единственный действительный корень четвертой степени из числа 0;
в) не существует действительных корней четвертой степени из числа -1.

360. Докажите, что число:
а) 10 есть корень шестой степени из 1 000 000;
б) -2 есть корень четвертой степени из 16;
в) 0,5 есть корень шестой степени из $\frac{1}{64}$;
г) $-\frac{1}{3}$ есть корень четвертой степени из $\frac{1}{81}$.

361. Найдите корень и докажите правильность решения:
а) $\sqrt[4]{10^4}$; б) $\sqrt[4]{\frac{1}{10\,000}}$; в) $\sqrt[6]{64}$; г) $\sqrt[4]{81}$.

362. Верно ли равенство:
а) $\sqrt[4]{16} = -2$; б) $\sqrt[6]{1} = 1$; в) $\sqrt[4]{-16} = -2$; г) $\sqrt[4]{16} = 2$?

363. Имеет ли смысл выражение:
а) $\sqrt[8]{35-6^2}$; б) $\sqrt[6]{27-5^2}$; в) $\sqrt{(-2)^3}$; г) $\sqrt[4]{(-8)^6}$?

364. Проверьте, является ли число:
а) 5 корнем пятой степени из 3125;
б) -2 корнем восьмой степени из 256;
в) 1,1 корнем четвертой степени из 1,4641;
г) $-\frac{2}{3}$ корнем шестой степени из $\frac{64}{729}$.

365. Покажите с помощью графика функции $y = x^4$, что существуют следующие корни, и укажите их значения с точностью до единиц:
а) $\sqrt[4]{3}$; б) $-\sqrt[4]{3}$; в) $\sqrt[4]{2}$; г) $-\sqrt[4]{2}$;
д) $\sqrt[4]{0}$; е) $\sqrt[4]{0{,}5}$; ж) $-\sqrt[4]{0{,}5}$.

366. Вычислите корни:
а) $\sqrt[4]{16}$; б) $\sqrt[4]{10\,000}$; в) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$; г) $\sqrt[4]{\frac{1}{625}}$.

367. Вычислите:
а) $5+\sqrt[4]{1}$; б) $\sqrt[6]{64}+3$; в) $\sqrt[4]{16}-1$; г) $8-\sqrt[6]{8^2}$;
д) $\sqrt[3]{27}-\sqrt[4]{81}$; е) $\sqrt[6]{4^3}+\sqrt[3]{-125}$; ж) $\sqrt[4]{16^2}$;
з) $\sqrt[4]{25^2}$; и) $\sqrt[6]{2\cdot 32}$; к) $\sqrt[6]{16\cdot 256}$.

368. При помощи графика решите уравнение:
а) $x^4 = 1$; б) $x^4 = -1$; в) $x^6 = 0$; г) $x^4 = 81$;
д) $x^4 = 4$; е) $x^4 = 25$; ж) $x^6 = 1$; з) $x^6 = 8$.

4.5. Арифметический корень

Пусть n — натуральное число, $n \geqslant 2$.

Неотрицательный кореиь степеии n из неотрицательиого числа a ($a \geqslant 0$) называют арифметическим корнем степеии n из числа a.

Как уже отмечалось в пункте 4.4, для нечетного n существует только одии корень из любого числа a. При этом он неотрицательиый, если a неотрицательно. Поэтому понятия корня нечетной степеии из неотрицательного числа a и арифметического кория той же степени из того же самого числа a совпадают.

В случае же четиого n, как уже отмечалось в пункте 4.4, существуют два корня степеии n из положительиого числа. Одии из них: $\sqrt[n]{a}$ — положительный, т. е. арифметический корень степени n из a, а другой равен ему по абсолютной величине, ио противоположен по знаку: $-\sqrt[n]{a}$. Корень степени n ($n \geqslant 2$) из нуля по определению есть арифметическнй корень степени n из иуля:

$$\sqrt[n]{0} = 0.$$

Подчеркнем, что:

1) если a — неотрицательное число, а n — любое натуральное число ($n \geqslant 2$), то запись $\sqrt[n]{a}$ означает арнфметический корень степени n из числа a;

2) если a — отрицательное число и $n = 2m + 1$ ($m \in N$) — нечетное число, то запись $\sqrt[2m+1]{a}$ означает кореиь степени $2m + 1$ из числа a, ио этот корень не является арифметическим корнем;

3) если a — отрицательное число, а $n = 2m$ ($m \in N$) — четное число, то запись $\sqrt[2m]{a}$ не имеет смысла.

Примеры. 1) Записи $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{0}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[3]{8}$ — записн арифметических корней.

2) Записи $-\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{-4}$, $-\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[5]{-8}$ — записи корней, которые не являются арифметическими корнями.

3) Записи $\sqrt{-3}$, $\sqrt[4]{-5}$, $\sqrt[6]{-11}$, $-\sqrt{-1}$ ие имеют смысла.

Теорема 1. *Для натурального числа n ($n \geqslant 2$) и неотрицательного числа a справедливы равенства*

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \tag{1}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a. \tag{2}$$

Доказательство. Так как a — неотрицательное число, то $\sqrt[n]{a}$ по определению неотрицательиое число, n-я степеиь которого есть a. Это и выражается равеиством (1).

Так как $a \geqslant 0$ — неотрицательиое число, то, как показаио в пункте 4.1, $a^n \geqslant 0$ н $\sqrt[n]{a^n}$ по определению неотрицательное число, n-я степень которого есть a^n. Таким числом является a, что и записано при помощи равенства (2). Другого неотрицательного числа, n-я степень которого равняется a^n, нет.

Теорема 1 доказана.

Примеры.

$$(\sqrt[4]{2})^4 = 2, \quad (\sqrt[3]{7})^3 = 7, \quad (\sqrt[21]{1})^{21} = 1,$$

$$\sqrt[4]{3^4} = 3, \quad \sqrt[9]{100^9} = 100, \quad \sqrt[7]{0^7} = 0.$$

Теорема 2. *Для натурального числа n ($n \geqslant 2$) и неотрицательных чисел a и b из равенства $a^n = b^n$ следует равенство $a = b$.*

Доказательство. Из равенства $a^n = b^n$ следует равенство $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{b^n}$. Учитывая, что $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, и используя равенство (2), получаем, что

$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ и } \sqrt[n]{b^n} = b.$$

Следовательно, $a = b$.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Для натурального числа n ($n \geqslant 2$) и неотрицательных чисел a, b и c ($c \neq 0$) справедливы равенства*

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \tag{3}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}. \tag{4}$$

Доказательство. По свойству (1) имеем

$$(\sqrt[n]{a \cdot b})^n = a \cdot b,$$

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b.$$

Правые части этих равенств равны. Следовательно, равны и левые их части:

$$(\sqrt[n]{a \cdot b})^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n.$$

Так как числа $\sqrt[n]{a \cdot b}$ и $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ неотрицательны, то, применяя теорему 2, получаем, что справедливо равенство (3). Аналогично доказывается равенство (4).

Теорема 3 доказана.

Примеры.

$$\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3},$$

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3},$$

$$\sqrt[4]{\frac{2}{81}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{3}, \quad \sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}.$$

Замечание. Если n — нечетное число, то теоремы 1, 2 и 3 справедливы для любых действительных чисел a, b и c ($c \neq 0$).

Кроме того, для натурального числа m и любого действительного числа a справедливо равенство

$$\sqrt[2m+1]{-a} = -\sqrt[2m+1]{a},$$

потому что

$$\sqrt[2m+1]{-a} = \sqrt[2m+1]{(-1)a} = \sqrt[2m+1]{-1}\,\sqrt[2m+1]{a} =$$
$$= (-1)\sqrt[2m+1]{a} = -\sqrt[2m+1]{a}.$$

Примеры.

$$\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3, \quad \sqrt[5]{-1} = -\sqrt[5]{1} = -1,$$
$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2, \quad \sqrt[5]{-100\,000} = -\sqrt[5]{10^5} = -10.$$

Свойства корней степени n используют для вынесения множителя из-под знака корня, внесения множителя под знак корня и при освобождении дроби от иррациональности в знаменателе.

Примеры.

1) $\sqrt[3]{-135} = -\sqrt[3]{135} = -\sqrt[3]{5\cdot 3^3} = -\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{5} = -3\sqrt[3]{5}$;

2) $-2\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{2^4\cdot 3} = -\sqrt[4]{48}$;

3) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}} = \dfrac{2\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[3]{3}} = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}} = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3}$.

369°. а) Что называют арифметическим корнем степени n ($n \geqslant 2$) из числа a?

б) Для каких действительных чисел определен арифметический корень степени n ($n \geqslant 2$) из данного числа?

в) Сколько существует арифметических корней степени n ($n \geqslant 2$) из данного числа?

370°. Верны ли для любого неотрицательного числа a и любого натурального числа n ($n \geqslant 2$) равенства

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a?$$

371°. Если $a^n = b^n$, то всегда ли $a = b$?

372. Чему равен корень степени n ($n \geqslant 2$) из:

а) произведения неотрицательных чисел;

б) частного положительных чисел?

373. Чему равен $\sqrt[2m+1]{-a}$, если a — любое действительное число?

374°. Является ли следующая запись записью арифметического корня:

а) $\sqrt[3]{(-2)}$; б) $-\sqrt[4]{3}$; в) $\sqrt[3]{(-2)^2}$; г) $\sqrt[4]{(-3)^3}$?

375. Вычислите арифметические корни:

а) $\sqrt[3]{(-8)^2}$; б) $\sqrt[4]{10\,000}$; в) $\sqrt[5]{2\cdot 16}$; г) $\sqrt[6]{9\cdot 81}$.

Вычислите (**376—380**):

376. а) $\sqrt[3]{1000}-\sqrt[4]{160\,000}$; б) $\sqrt[5]{3\,200\,000}+\sqrt[3]{8000}$;

в) $\sqrt[3]{0{,}008}+\sqrt[4]{0{,}0625}$; г) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}-\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$.

377. а) $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[3]{125\cdot 27}$;

в) $\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{625}$; г) $\sqrt[4]{81\cdot 16}$;

д) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$; е) $\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{2}$;

ж) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{125}$; з) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{24}$.

378. а) $\sqrt[3]{2}\,(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{500})$; б) $\sqrt[4]{5}\,(\sqrt[4]{2000}-\sqrt[4]{125})$;

в) $\sqrt[3]{0{,}81}\cdot\sqrt[3]{0{,}9}$; г) $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{1250}$.

379. а) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}$; б) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16}$;

в) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{-2}$; г) $\sqrt[5]{-7}\cdot\sqrt[5]{49}\cdot\sqrt[5]{49}$.

380. а) $(\sqrt[3]{-2})^3+(\sqrt[5]{8})^5$; б) $\sqrt[5]{-1}-\sqrt[3]{-8}$.

Вынесите множитель из-под знака корня (**381—383**):

381. а) $\sqrt[5]{40}$; б) $\sqrt[5]{-64}$; в) $\sqrt[5]{-96}$; г) $\sqrt[3]{54}$.

382. а) $\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$; б) $\sqrt[3]{\frac{27}{4}}$; в) $\sqrt[3]{-\frac{250}{16}}$; г) $\sqrt[3]{-\frac{64}{7}}$.

383. а) $\sqrt[4]{32}$; б) $\sqrt[4]{243}$; в) $\sqrt[4]{1296}$; г) $\sqrt[4]{50\,625}$.

384. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{1}{\sqrt[5]{2}}$; в) $\frac{3}{\sqrt[3]{-4}}$; г) $\frac{5}{\sqrt[3]{-9}}$.

385. а) Запишите числа, арифметические корни пятой степени которых равны 2; 3; $\frac{1}{4}$; 0,2.

б) Запишите числа, арифметические корни четвертой степени которых равны 2; 3; $\frac{1}{4}$; 0,2.

386. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; б) $\sqrt[3]{4\frac{17}{27}}$; в) $\sqrt[4]{2\frac{113}{256}}$; г) $\sqrt[3]{669\frac{59}{64}}$.

Докажите числовое неравенство (**387—388**):

387. а) $\sqrt[5]{10}>2$; б) $3<\sqrt[4]{100}$; в) $\sqrt{7}>\sqrt[4]{16}$; г) $\sqrt[4]{81}<\sqrt{10}$.

388. а) $\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}$; б) $\sqrt[4]{3}<\sqrt[3]{4}$;

в) $\sqrt[5]{2}<\sqrt{5}$; г) $\sqrt{7}>\sqrt[4]{20}$.

389. Сравните числа:

а) 2 и $\sqrt[3]{7}$; б) $\sqrt[4]{12}$ и 2; в) $\sqrt[3]{3}$ и 1,5; г) $\sqrt[4]{75}$ и 3.

390. Найдите два последовательных натуральных числа, между которыми заключено число:

а) $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[3]{4}$; в) $\sqrt[4]{2}$; г) $\sqrt[4]{3}$.

391. Найдите число x, удовлетворяющее равенству:

а) $\sqrt[3]{x}=2$; б) $\sqrt[4]{x}=2$; в) $\sqrt[6]{x}=1$; г) $\sqrt[5]{x}=1$.

392. Вычислите:

а) $\sqrt{(-2)^2}$; б) $\sqrt{(-5)^4}$; в) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$;

г) $\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}$; д) $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$; е) $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{7})^2}$.

393. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{32}$; б) $\sqrt[5]{800}$; в) $30\sqrt[3]{\frac{1}{12}}+\frac{7}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+5\sqrt[3]{144}$;

г) $\sqrt[3]{48}-\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{40}$; д) $\sqrt[4]{80}$; е) $\sqrt[4]{405}$;

ж) $\sqrt[4]{81\cdot(4-\sqrt{17})^4}$; з) $\sqrt[3]{0{,}001}-\sqrt[6]{0{,}000064}$.

394. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{m^4}$; б) $\sqrt[4]{(-m)^4}$;

в) $\sqrt{(x-1)^2}$, если $x<1$; г) $\sqrt{(1-x)^2}$, если $x\geqslant 1$

(m, x — действительные числа[1]).

395. Для каких чисел a имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{2a}$; б) $\sqrt[3]{a-1}$; в) $\sqrt[4]{-a}$; г) $\sqrt[5]{1-a}$?

396. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{3x}$; б) $y=\sqrt[3]{-5x}$; в) $y=\sqrt[4]{2x-1}$; г) $y=\sqrt[5]{4-5x}$.

397. Для каких чисел k справедливо равенство:

а) $\sqrt{(k-1)^2}=1-k$; б) $\sqrt{(1+k)^2}=-1-k$?

398. Упростите выражение $\sqrt[4]{(x+1)^4}$, если:

а) $x\geqslant -1$; б) $x<-1$, где x — действительное число.

4.6. Свойства корней степени n

Теорема 1. *Для натуральных чисел m, n ($n\geqslant 2$, $m\geqslant 2$) и неотрицательного числа a справедливы равенства*

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}, \qquad (1)$$

$$\sqrt[mn]{a^m}=\sqrt[n]{a}, \qquad (2)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}. \qquad (3)$$

Доказательство. Заметим, что, в силу того что $a\geqslant 0$, числа, стоящие в левых и правых частях (пока предполагаемых) равенств (1) — (3), неотрицательны.

Метод доказательства этих равенств основан на применении теоремы 2 пункта 4.5, в силу которой если n-е степени неотрицательных чисел равны между собой, то и сами числа равны между собой.

[1] Здесь и далее буквами обозначены числа, для которых рассматриваемые выражения имеют смысл.

Если возведем отдельно левую и правую части предполагаемого равенства (1) в n-ю степень, то получим равные числа:

$$((\sqrt[n]{a})^m)^n = ((\sqrt[n]{a})^n)^m = a^m, \qquad (\sqrt[n]{a^m})^n = a^m.$$

Следовательно, равенство (1) верно.

Если возведем отдельно левую и правую части предполагаемого равенства (2) в степень mn, то получим равные числа:

$$(\sqrt[mn]{a^m})^{mn} = a^m, \qquad (\sqrt[n]{a})^{mn} = ((\sqrt[n]{a})^n)^m = a^m.$$

Следовательно, равенство (2) верно.

Если возведем отдельно левые и правые части предполагаемого равенства (3) в степень mn, то получим равные числа:

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a, \qquad (\sqrt[mn]{a})^{mn} = a.$$

Следовательно, равенство (3) верно.

Теорема 1 доказана.

Примеры.

$$\sqrt{4^3} = (\sqrt{4})^3 = 2^3, \qquad \sqrt[3]{\frac{1}{27^4}} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\right)^4 = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81},$$

$$\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}, \qquad \sqrt[3]{\sqrt{12}} = \sqrt[6]{12}, \qquad \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[4]{16} = 2.$$

З а м е ч а н и е. Если m и n — нечетные числа, то теорема 1 справедлива для любых действительных чисел a, необязательно неотрицательных.

Т е о р е м а 2. *Для натурального числа m и любого действительного числа a справедливо равенство*

$$\sqrt[2m]{a^{2m}} = |a|. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a есть произвольное действительное число. Тогда

$$a^{2m} = |a|^{2m} \geqslant 0.$$

Поэтому в силу равенства (2) п. 4.5

$$\sqrt[2m]{a^{2m}} = \sqrt[2m]{|a|^{2m}} = |a|,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2 доказана.

Примеры.

$$\sqrt[6]{(-3)^6} = |-3| = 3, \qquad \sqrt[4]{5^4} = |5| = 5.$$

З а м е ч а н и е. Для любого натурального числа m и любого действительного числа a справедливо равенство

$$\sqrt[2m+1]{a^{2m+1}} = a.$$

Справедливость этого утверждения следует из замечания на с. 85.

Теорема 3. *Пусть a — положительное число, p — целое число и n — натуральное число, $n \geqslant 2$.*

Тогда справедливо равенство

$$\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p. \qquad (5)$$

Доказательство. Если p — натуральное число, то равенство (5) уже доказано (см. (1)).

Если $p = 0$, то

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{1} = 1, \ (\sqrt[n]{a})^p = 1.$$

Следовательно, $\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$.

Если $p < 0$, то $p = -|p|$, где $|p|$ — натуральное число. Тогда, используя определение степени с отрицательным целым показателем и свойства арифметических корней степени n, получаем:

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^{|p|}}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a^{|p|}}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^{|p|}} = (\sqrt[n]{a})^{-|p|} = (\sqrt[n]{a})^p.$$

Теорема 3 доказана.

Примеры.

$$\sqrt[3]{27^{-4}} = (\sqrt[3]{27})^{-4} = 3^{-4}, \qquad \sqrt{9^3} = (\sqrt{9})^3 = 3^3.$$

---

399. а) Сформулируйте свойства корней степени n.

б) Чему равен $\sqrt[2m+1]{a^{2m+1}}$, если a — любое действительное число?

в) Чему равен $\sqrt[2m]{a^{2m}}$, если a — любое действительное число?

г) Справедливо ли равенство $\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$, если n — натуральное число, $n \geqslant 2$, p — целое число, a — положительное число?

Вычислите (**400—402**):

400. а) $(\sqrt{3})^2$; б) $\sqrt[3]{8^2}$; в) $\sqrt[3]{125^2}$; г) $\sqrt[4]{81^3}$;

д) $\sqrt{49^3}$; е) $\sqrt[3]{27^2}$; ж) $\sqrt[4]{16^3}$; з) $\sqrt[5]{32^4}$.

401. а) $\sqrt[4]{9^2}$; б) $\sqrt[4]{25^2}$; в) $\sqrt[6]{8^2}$; г) $\sqrt[6]{16^3}$;

д) $\sqrt[6]{27^2}$; е) $\sqrt[6]{81^3}$; ж) $\sqrt[200]{49^{100}}$; з) $\sqrt[300]{125^{100}}$.

402. а) $\sqrt[4]{81}$; б) $\sqrt[4]{625}$; в) $\sqrt[4]{160\,000}$; г) $\sqrt[4]{0{,}0625}$;

д) $\sqrt[6]{729}$; е) $\sqrt[6]{64\,000\,000}$; ж) $\sqrt[6]{0{,}000\,729}$.

Например: $\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$.

403[1]. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{80}$; б) $\sqrt[3]{81}$; в) $\sqrt[3]{250}$; г) $\sqrt[3]{-648}$;

---

[1] Здесь и далее буквами обозначены числа, для которых рассматриваемые выражения имеют смысл.

д) $\sqrt[5]{a^7b}$; е) $\sqrt[4]{16c^5d^6}$, если $c > 0$, $d > 0$;

ж) $\sqrt[4]{5x^4}$, если $x < 0$; з) $\sqrt[5]{3x^5y}$.

Например: $\sqrt[3]{16x^4y^6} = \sqrt[3]{2^4x^4y^6} = \sqrt[3]{2^3 \cdot x^3 \cdot (y^2)^3 \cdot 2x} =$
$= \sqrt[3]{(2xy^2)^3} \cdot \sqrt[3]{2x} = 2xy^2\sqrt[3]{2x}$.

Упростите выражение (**404—405**):

404. а) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$; б) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{18}$;
в) $5\sqrt[3]{2a} \cdot \sqrt[3]{4b}$; г) $\sqrt[5]{a} \cdot 2\sqrt[5]{a^4}$.

405. а) $\sqrt[3]{2c^2} \cdot \sqrt[3]{4c}$; б) $\sqrt[3]{9x} \cdot \sqrt[3]{9x^2}$;
в) $\sqrt[11]{a} \cdot \sqrt[11]{b} \cdot \sqrt[11]{c}$; г) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[3]{x}$.

Внесите множитель под знак корня (**406—407**):

406. а) $3\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$; б) $2\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$; в) $5\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$; г) $7\sqrt[5]{\frac{1}{b}}$.

407. а) $b\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; б) $c\sqrt[3]{\frac{x^2}{c}}$;
в) $\frac{ay}{b}\sqrt[3]{\frac{b^2x}{a^2y}}$; г) $\frac{a^2}{b}\sqrt[4]{\frac{b^2x}{a^7}}$, где $b>0$.

Упростите выражеиие (**408—411**):

408. а) $\frac{\sqrt[4]{m^3}}{\sqrt[4]{m}}$; б) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^4}}$; в) $\frac{\sqrt[3]{a^5b}}{\sqrt[3]{a^2b^4}}$; г) $\frac{\sqrt[4]{m^7n^5}}{\sqrt[4]{m^3n}}$.

409. а) $(\sqrt[3]{x})^2$; б) $(\sqrt[4]{m})^5$; в) $(\sqrt[5]{ab^4})^2$; г) $(\sqrt[3]{4x^3y^2})^2$.

410. а) $\sqrt[4]{a^2}$; б) $\sqrt[5]{a^3}$; в) $\sqrt[4]{a^2b^2}$; г) $\sqrt[6]{a^4b^2}$.

411. а) $\sqrt[6]{27}$; б) $\sqrt[6]{16}$; в) $\sqrt[9]{64}$; г) $\sqrt[12]{81}$.

412. Запишите $\sqrt{a}$ $(a \geqslant 0)$ как корень:
а) четвертой степени; б) шестой степени;
в) десятой степени; г) шестиадцатой степени.

413. Запишите $\sqrt{x}\,(x \geqslant 0)$ как кореиь:
а) восьмой степеии; б) двенадцатой степеии;
в) двадцать четвертой степени; г) тридцатой степеии.

414. Упростите числовое выражение:
а) $\sqrt{2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[3]{3\sqrt{2}}$; в) $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}$;
г) $\sqrt{2\sqrt[4]{4\sqrt{4}}}$; д) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}} : \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$; е) $\sqrt[3]{32\sqrt[4]{2}} \cdot \sqrt{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}}$.

415. Запишите в виде корией одиой и той же степеии три числа:
а) $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$ и $\sqrt[6]{5}$; б) $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{15}$ и $\sqrt[8]{50}$.

Запишите в виде корней одной и той же степени и упростите выражение (**416—419**):

416. а) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a}$; б) $\sqrt[4]{b} \cdot \sqrt[3]{b}$; в) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{b}$; г) $\sqrt[9]{x} \cdot \sqrt[13]{y}$.

417. а) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{100}}{\sqrt{10}}$; в) $\sqrt{\frac{m}{n}} \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{m}}$; г) $\sqrt[3]{\frac{p}{q}} \cdot \sqrt[4]{\frac{q}{p}}$.

418. а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{b}}$; в) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{y^{10}}}$; г) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$.

419. а) $\sqrt{a\sqrt[4]{a}}$; б) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$; в) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$; г) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{b\sqrt[3]{c}}}$.

420. Найдите число x, удовлетворяющее равенству:

а) $\sqrt[3]{x+5}=2$; б) $\sqrt[4]{x+79}=3$; в) $2\sqrt[4]{x}=3$; г) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{x}=5$.

421. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{\frac{8x^3y^6}{27a^{12}b^9}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{16a^{16}b^{12}}{81x^{24}b^4}}$.

422. Используя свойства корней степеии n, запишите число так, чтобы под знаком кория было целое число:

а) $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$; в) $5\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$; г) $\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$.

423. Упростите выражеиие:

а) $(\sqrt[4]{a}-1)(\sqrt[4]{a}+1)$; б) $(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})$;

в) $(\sqrt[3]{m}-\sqrt[4]{m})(\sqrt[4]{m}+\sqrt[3]{m})$; г) $(\sqrt[4]{p}-\sqrt[3]{p^2})(\sqrt[3]{p^2}+\sqrt[4]{p})$.

4.7*. Корень степени n из натурального числа

Пусть n ($n \geqslant 2$) — натуральное число. Очевидно, что степень n иатурального числа b есть натуральное число. Но не всякое натуральиое число есть степень n иекоторого иатурального числа.

Например, среди натуральиых чисел, не больших 100, только четыре, т. е. 4%, являются кубами натуральиых чисел, а именно

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3.$$

Среди иатуральных чисел, не больших 1000, только 10, т. е. 1%, являются кубами натуральиых чисел, а именно

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ \ldots,\ 10^3.$$

Мы видим, что среди больших натуральиых чисел редко встречаются степени натуральиых чисел.

Отметим следующий факт: **арифметический корень степени n ($n \geqslant 2$) из натурального числа может быть или иатуральным числом, или иррациональным числом.**

Таким образом, иапример, корни

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt[4]{3},\ \sqrt[5]{7},\ \sqrt[6]{19}$$

есть числа иррациональные.

Конечио, это утверждение при любом $n \geqslant 2$ иадо доказывать. Оно доказывается так же, как было доказаио раиее при $n=2$.

Если даниое натуральиое число не есть степень n ($n \geqslant 2$) иатурального числа, то из этого числа кореиь степени n точно ие извлекается. Покажем, как можно приближенно извлечь корень степеии n из иатурального числа, не являющегося степеиью n иатурального числа.

Ограничимся примером.

Вычислим приближенно с точностью до второго знака после запятой число $\sqrt[3]{17}$.

Мы знаем, что это число положительное. Оно имеет некоторое десятичное разложение: $\sqrt[3]{17} = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$.

Вычислить приближенно с точностью до второго знака после запятой (с недостатком) число $\sqrt[3]{17}$ — это значит вычислить точно числа α_0, α_1, α_2.

Рассмотрим числа 0^3, 1^3, 2^3, 3^3, ..., чтобы найти два стоящих рядом, между которыми находится число 17. Очевидно,

$$8 = 2^3 < 17 < 3^3 = 27.$$

Следовательно, $2 < \sqrt[3]{17} < 3$ и $\alpha_0 = 2$.

Теперь рассмотрим числа 2^3; $2{,}1^3$; $2{,}2^3$; $2{,}3^3$; $2{,}4^3$; ...; $2{,}9^3$; 3^3, найдем среди них два стоящих рядом, между которыми находится число 17. Имеем

$$15{,}625 = 2{,}5^3 < 17 < 2{,}6^3 = 17{,}576,$$

откуда

$$2{,}5 < \sqrt[3]{17} < 2{,}6,$$

и, следовательно, $\alpha_1 = 5$.

Теперь рассмотрим с той же целью числа

$$2{,}5^3;\ 2{,}51^3;\ 2{,}52^3;\ \ldots;\ 2{,}59^3;\ 2{,}6^3.$$

Оказывается, что

$$16{,}974\ldots = 2{,}57^3 < 17 < 2{,}58^3 = 17{,}173\ldots,$$

следовательно, $\alpha_2 = 7$.

Итак, $\sqrt[3]{17} = 2{,}57\ldots$.

Как видно, использованный метод вычисления простой, но громоздкий.

Электронные калькуляторы эти вычисления производят мгновенно. Точность результата определяется техническими возможностями данного калькулятора.

Приближенные значения квадратных и кубических корней из чисел также можно получить, используя соответствующие таблицы.

424°. Может ли быть рациональным числом корень степени n ($n \geqslant 2$):

а) из простого числа; б) из натурального числа?

425. Что значит вычислить с точностью до третьего знака после запятой (с недостатком) $\sqrt[3]{N}$, где N — простое число?

426°. Если натуральное число N не есть куб натурального числа, то является ли число $\sqrt[3]{N}$ иррациональным?

427.• Имеются ли среди натуральных чисел от 100 до 200 четвертые степени каких-либо натуральных чисел?

428°. Является ли кубом натурального числа:

а) 0; б) 1; в) -8; г) 1000?

429*. Докажите, что не существует рационального числа, куб которого равен:

а) 2; б) 3; в) 4; г) 5.

430*. Докажите иррациональность числа:

а) $\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[3]{n}$, где n — простое число.

431. Является ли рациональным число:

а) $\sqrt{4}$; б) $\sqrt[3]{64}$; в) $\sqrt[3]{5}$; г) $\sqrt[4]{64}$?

432. Для каждого из чисел 7; 10; 17 найдите:

а) наибольшее натуральное число, куб которого меньше данного числа;

б) наименьшее натуральное число, куб которого больше данного числа;

в) наибольшее натуральное число, четвертая степень которого меньше данного числа;

г) наименьшее натуральное число, четвертая степень которого больше данного числа.

433. Найдите приближенное значение кубического корня с точностью до 0,1 из следующих чисел:

а) 3; б) 6; в) 8; г) 10.

434. Вычислите с точностью до 1:

а) $\sqrt[3]{175}$; б) $\sqrt[3]{241}$; в) $\sqrt[4]{105}$; г) $\sqrt[4]{273}$.

435. Проверьте справедливость неравенств:

а) $3 < \sqrt[3]{30} < 4$; б) $7 < \sqrt[3]{350} < 8$;

в) $5{,}1 < \sqrt[3]{135} < 5{,}2$; г) $3{,}5 < \sqrt[3]{45} < 3{,}6$.

436. Какое число является лучшим приближением $\sqrt[3]{96}$:

а) 4 или 5; б) 4,5 или 4,6?

437. Вычислите с точностью до третьего знака после запятой:

а) $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[3]{5}$; в) $\sqrt[3]{7}$.

438. Вычислите с точностью до первого знака после запятой:

а) $\sqrt[4]{3}$; б) $\sqrt[5]{7}$; в) $\sqrt[5]{8}$.

4.8*. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geqslant 0)$

Пусть n $(n \geqslant 2)$ — натуральное число. Каждому неотрицательному числу x поставим в соответствие число y, равное арифметическому корню степени n из x. Иными словами, на множестве неотрицательных чисел зададим функцию

$$y = \sqrt[n]{x}. \qquad (1)$$

Таким образом, областью определения функции (1) является множество неотрицательных чисел: $x \geqslant 0$.

Отметим следующие *свойства* функции (1).

1) **Если $x = 0$, то $y = 0$.**

2) **Если $x > 0$, то $y > 0$.**

3) **Функция $y = \sqrt[n]{x}$ возрастает.**

4) **Если $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$.**

5) **Функция $y = \sqrt[n]{x}$ непрерывна.**

Свойство 1 следует из того, что корень степени n из нуля равен нулю.

Свойство 2 следует из того, что арифметический корень степени n из положительного числа есть число положительное.

Докажем теперь свойство 3, т. е. докажем способом от противного, что если $0 \leqslant x_1 < x_2$, то $\sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2}$. Предположим, что найдутся числа x_1 и x_2, такие, что

$$0 \leqslant x_1 < x_2, \text{ но } \sqrt[n]{x_1} \geqslant \sqrt[n]{x_2}.$$

Учитывая, что эти числа неотрицательные, получим, что

$$(\sqrt[n]{x_1})^n \geqslant (\sqrt[n]{x_2})^n,$$

т. е. $x_1 \geqslant x_2$, что противоречит неравенствам $0 \leqslant x_1 < x_2$. Следовательно, наше предположение неверно, а верно свойство 3.

Если x стремится к плюс бесконечности, пробегая числа

$$1^n, \; 2^n, \; 3^n, \; 4^n, \; \ldots, \; m^n, \; \ldots,$$

то $y = \sqrt[n]{x}$ пробегает числа

$$1, 2, 3, 4, \ldots, m, \ldots$$

и, очевидно, также стремится к плюс бесконечности. Для других значений x это свойство сохраняется.

Доказательство свойства 5 будет следовать из рассмотрения графика функции (1).

Перейдем к построению графика функции $y = \sqrt[n]{x}$ $(x \geqslant 0)$ в декартовой системе координат xOy.

Рассмотрим сначала степенную функцию

$$x = y^n \quad (y \geqslant 0) \tag{2}$$

и изобразим ее график в той же системе координат xOy.

Чтобы получить произвольную точку этого графика, имеющую ординату y $(y \geqslant 0)$, отметим на оси Oy точку $(0; y)$ (рис. 51), проведем через нее прямую, параллельную оси Ox, и на последней возьмем точку A, имеющую абсциссу $x = y^n$.

Точка A будет иметь координаты $A(y^n; y)$. Это и есть точка графика функции (2).

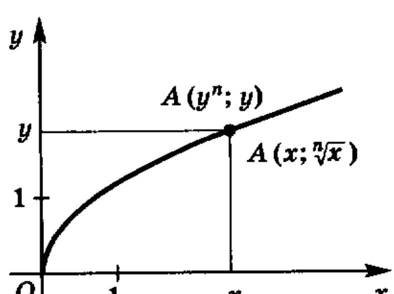


Рис. 51

Совокупность точек A (y^n; y), соответствующих любым неотрицательным y, есть график функции $x = y^n$ ($y \geqslant 0$).

Но так как для $y \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$ равенства $x = y^n$ и $y = \sqrt[n]{x}$ выражают одну и ту же зависимость между x и y, то координаты точки A можно записать в виде A (x; $\sqrt[n]{x}$).

Это показывает, что A — точка графика функции (1) — одновременно является и точкой графика функции (2).

Но очевидно и обратное: если A — точка графика функции (2), то она является и точкой графика функции (1).

Итак, график функции $y = \sqrt[n]{x}$ ($x \geqslant 0$) есть часть параболы степени n $x = y^n$ для $y \geqslant 0$.

Легко видеть, что график функции (1) отражает свойства 1—5 функции (1).

Действительно, график функции (1) проходит через начало координат — свойство 1; график функции (1) расположен выше оси Ox для $x > 0$ — свойство 2; график изображает возрастающую функцию — свойство 3; при $x \to +\infty$ ординаты соответствующих точек графика функции неограниченно возрастают — свойство 4; график функции (1) есть непрерывная кривая — свойство 5.

Приведем еще некоторые *свойства* арифметических корней.

1) **Если $x > 1$, то $\sqrt[n]{x} > 1$.**

2) **Если $0 < x < 1$, то $0 < \sqrt[n]{x} < 1$.**

На интервале (0; 1), т. е. для значений x, для которых $0 < x < 1$, выполняются неравенства

$$x < \sqrt{x} < \sqrt[3]{x} < \sqrt[4]{x} < \ldots . \qquad (3)$$

Например, для этих x очевидны неравенства

$$(\sqrt{x})^6 = x^3 < x^2 = (\sqrt[3]{x})^6,$$

откуда и получаем, что $\sqrt{x} < \sqrt[3]{x}$. Аналогично доказываются и остальные неравенства (3).

В силу неравенств (3) график функции $y = \sqrt{x}$ на интервале (0; 1) расположен выше графика функции $y = x$, график функции $y = \sqrt[3]{x}$ расположен выше графика функции $y = \sqrt{x}$ и т. д.

Далее, на интервале (1; $+\infty$) выполняются неравенства

$$x > \sqrt{x} > \sqrt[3]{x} > \sqrt[4]{x} > \ldots . \qquad (4)$$

Например, для этих x очевидны неравенства

$$(\sqrt{x})^6 = x^3 > x^2 = (\sqrt[3]{x})^6,$$

откуда получаем, что $\sqrt{x} > \sqrt[3]{x}$. Аналогично доказываются и остальные неравенства (4).

В силу неравенств (4) график функции $y = \sqrt{x}$ на интервале (1; $+\infty$) расположен ниже графика функции $y = x$, график функции $y = \sqrt[3]{x}$ расположен ниже графика функции $y = \sqrt{x}$ и т. д.

Справедливость свойства 2 следует из того, что

$$\sqrt[n]{0} = 0, \ \sqrt[n]{1} = 1,$$

и того, что функция

$$y = \sqrt[n]{x} \ (x \geqslant 0)$$

возрастает.

На рисунке 52 в одной и той же декартовой системе координат xOy изображены графики функций

$y = x$; $\quad y = \sqrt{x}$; $\quad y = \sqrt[3]{x} (x \geqslant 0)$.

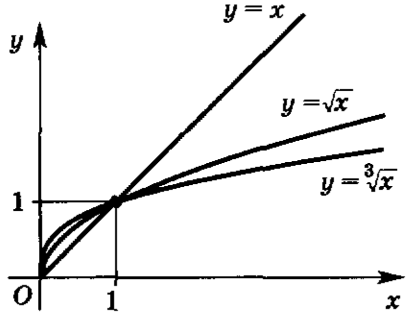


Рис. 52

---

439. а) Какова область определения функции $y = \sqrt[n]{x}$?

б) Каковы свойства функции $y = \sqrt[n]{x} \ (x \geqslant 0)$?

в) Какая кривая является графиком функции $y = \sqrt[n]{x} \ (x \geqslant 0)$?

440. Используя график функции

$$y = x^3 \quad (x \geqslant 0),$$

определите приближенно $\sqrt[3]{y}$ для следующих значений y:
а) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8;
б) 0,5; 1,5; 2,5; 3,5; 4,5; 5,5; 6,5; 7,5; 8,5.

Постройте график функции (**441—442**):

441. а) $x = 2y$; б) $x = -5y$; в) $x = y^2$; г) $x = y^3$;
д) $x = 2y - 4$; е) $x = y + 5$; ж) $x = 2y^2$; з) $x = 5y^3$
для $y \geqslant 0$.

442. а) $y = \sqrt[3]{x}$; б) $y = \sqrt[4]{x}$; в) $y = \sqrt[5]{x}$; г) $y = \sqrt[6]{x}$
для $x \geqslant 0$.

443. Используя графики функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = \sqrt[4]{x}$, сравните значения функций (единичные отрезки по 3 см):

а) $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[4]{4}$; б) $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[4]{3}$;

в) $\sqrt[3]{0,5}$ и $\sqrt[4]{0,5}$; г) $\sqrt[3]{0,3}$ и $\sqrt[4]{0,3}$.

444. Известно, что:
а) $\sqrt[3]{a} > 1$; б) $\sqrt[3]{a} < 1$.
Верно ли, что a больше единицы; больше нуля?

445. Постройте график функции $y = \sqrt[4]{x}$. С помощью графика найдите:
а) при каких x справедливо неравенство $x^4 > 1$;
б) при каких x справедливо неравенство $x^4 < 1$.

446. Используя график функции $\sqrt[3]{x}$, покажите, что:

а) $\sqrt[3]{10} > \sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{4}$;

в) $\sqrt[3]{0,5} > \sqrt[3]{0,2}$; г) $\sqrt[3]{0,9} > \sqrt[3]{0,4}$.

447. Сравните натуральные числа m $(m \geqslant 2)$ и n $(n \geqslant 2)$, если:

а) $\sqrt[m]{5} > \sqrt[n]{5}$; б) $\sqrt[m]{8} > \sqrt[n]{8}$;

в) $\sqrt[m]{0,2} > \sqrt[n]{0,2}$; г) $\sqrt[m]{0,2} < \sqrt[n]{0,2}$.

448. а) Сравните с единицей положительное число a, если:

1) $\sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a}$; 2) $\sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a}$; 3) $\sqrt[5]{a} > \sqrt[6]{a}$; 4) $\sqrt[6]{a} < \sqrt[5]{a}$.

б) Каким может быть натуральное число n $(n \geqslant 2)$, если:

1) $\sqrt[n]{16} < 4$; 2) $\sqrt[n]{16} < 4$?

449*. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{|x|}$; б) $y = \left|\sqrt{x} - 1\right|$; в) $y = -\sqrt{x}$;

г) $y = \sqrt{-x}$; д) $y = -\sqrt{-x}$; е) $y = \sqrt{x-4}$;

ж) $y = \sqrt[3]{|x|}$; з) $y = \sqrt[3]{x-8}$.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ II

1. Понятие степени с рациональным показателем

Ранее уже было введено и изучено понятие степени с целым показателем p (a^p), т. е. когда показатель p — целое число (положительное, отрицательное или нуль). Теперь определим степень с рациональным показателем, т. е. с показателем $\frac{p}{q}$, где p — целое число, а q — натуральное число, $q \geqslant 2$.

Пусть a — положительное число, а $\frac{p}{q}$ — рациональное число $q \geqslant 2$. По определению a в степени $\frac{p}{q}$ равно арифметическому корню степени q из a в степени p, т. е. по определению

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Например:

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2},\ 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3},\ 7^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{7},\ 2^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^{-3}}.$$

Теорема. *Пусть a — положительное число, p — целое число, k и q — натуральные числа, $q \geqslant 2$; $k \geqslant 2$. Тогда справедливы равенства*

$$a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p, \qquad (1)$$

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pk}{qk}}, \qquad (2)$$

$$a^p = a^{\frac{pq}{q}}. \qquad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению степени с рациональным показателем

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Применяя теорему 3 п. 4.6, имеем

$$\sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p.$$

Опять используя определение степени с рациональным показателем, получим, что

$$(\sqrt[q]{a})^p = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p.$$

Из этих равенств вытекает равенство (1).

Докажем теперь равенство (2). По определению степени с рациональным показателем

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}. \qquad (4)$$

С другой стороны, в силу того же определения и свойств корней степени q имеем

$$a^{\frac{pk}{qk}} = \sqrt[qk]{a^{pk}} = \sqrt[qk]{(a^p)^k} = \sqrt[q]{a^p}. \qquad (5)$$

Так как правые части равенств (4) и (5) равны, то равны и левые части, тем самым доказано равенство (2).

Применяя определение степени с рациональным показателем и свойства корней степени n, получим, что

$$a^{\frac{pq}{q}} = \sqrt[q]{a^{pq}} = \sqrt[q]{(a^p)^q} = a^p.$$

Тем самым доказано равенство (3).

Теорема доказана.

Примеры.

$$27^{-\frac{4}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-4} = 3^{-4}, \qquad 6^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{3}{9}}, \qquad 2^{-3} = 2^{-\frac{12}{4}}, \qquad 5^{-3} = 5^{-\frac{6}{2}}.$$

З а м е ч а н и е 1. Если k и q — натуральные числа, а p — целое число, то справедливо равенство $\frac{p}{q} = \frac{pk}{qk}$. Поэтому если $r = \frac{p}{q}$, то $r = \frac{pk}{qk}$ для любого натурального k.

Равенство (2) показывает, что определение степени с рациональным показателем a^r не зависит от формы записи числа r, а зависит лишь от самого числа r. При любой форме записи данного рационального числа определение a^r приводит к одному и тому же числу. Если бы это было не так, то определение степени с рациональным показателем было бы противоречиво.

З а м е ч а н и е 2. Равенство (3) показывает, что определение степени с рациональным показателем содержит в себе определение степени с целым показателем.

450°. а) Что понимается под степенью с рациональным показателем $\frac{p}{q}$ $(q \geqslant 2)$ положительного числа a?

б) Сформулируйте теорему, доказанную в этом пункте.

в) Почему в определении степени с рациональным показателем нет противоречия?

Запишите в виде степени с рациональным показателем[1] **(451—453)**:

451. а) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{1\frac{1}{3}}$;

б) $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{0{,}1}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{2{,}5}$;

в) $\sqrt[3]{2^2}$, $\sqrt[4]{3^5}$, $\sqrt[6]{7^5}$, $\sqrt{3^7}$, $\sqrt[5]{2^3}$.

452. а) $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt{x^3}$;

б) $\sqrt{2a}$, $\sqrt[3]{3x}$, $\sqrt[4]{5x^3}$, $\sqrt{2xy^3}$, $\sqrt[5]{8a^2b^3}$.

453. а) $\sqrt{a-1}$; б) $\sqrt[3]{m+n}$; в) $\sqrt[3]{(x+1)^2}$; г) $\sqrt[5]{(x-4)^3}$.

Запишите в виде корней **(454—456)**:

454. а) $a^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{1}{3}}$; $b^{\frac{1}{4}}$; $(ac)^{\frac{1}{7}}$; $(kl)^{\frac{1}{20}}$;

б) $(x+1)^{\frac{1}{2}}$; $(a-b)^{\frac{7}{4}}$; $(m+3)^{\frac{1}{4}}$; $(x-y)^{\frac{1}{7}}$.

455. а) $3^{\frac{2}{3}}$; $4^{\frac{3}{5}}$; $6^{\frac{2}{3}}$; $7^{\frac{5}{9}}$; $10^{0{,}6}$;

б) $a^{1\frac{2}{3}}$; $c^{1{,}4}$; $x^{\frac{1}{n}}$; $x^{\frac{n}{2}}$; $y^{\frac{m}{n}}$,

где n и m — натуральные числа и $n \geqslant 2$.

456. а) $a^{-0{,}5}$; $b^{-\frac{2}{3}}$; $c^{-2{,}5}$; $x^{-0{,}5}$;

б) $(a^2-b)^{-\frac{1}{2}}$; $(x+2y)^{-0{,}75}$; $(1-2y)^{-\frac{2}{5}}$; $(m-n^2)^{-\frac{1}{n}}$,

где $n \geqslant 2$ — натуральное число.

Вычислите **(457—458)**:

457. а) $25^{\frac{1}{2}}$; $49^{\frac{1}{2}}$; $27^{\frac{1}{3}}$; $16^{0{,}25}$; $100^{0{,}5}$;

б) $16^{\frac{3}{4}}$; $27^{\frac{2}{3}}$; $25^{2{,}5}$; $8^{\frac{5}{3}}$; $27^{\frac{2}{3}}$;

в) $8^{-\frac{2}{3}}$; $16^{-\frac{3}{2}}$; $64^{-\frac{5}{6}}$; $32^{-0{,}4}$.

458. а) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{49}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$; б) $(0{,}01)^{-\frac{1}{2}}\cdot(6{,}25)^{-0{,}5}$.

[1] Здесь и далее буквами обозначены числа, для которых рассматриваемые выражения имеют смысл.

459. Объясните, почему для любого числа $a \geqslant 0$ верно равенство:

а) $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a$; б) $(a^3)^{\frac{1}{3}} = a$; в) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$; г) $(a^2)^{\frac{1}{2}} = a$.

2. Свойства степени с рациональным показателем

Теорема 1. *Положительное число a в степени с любым рациональным показателем r положительно:*

$$a^r > 0. \tag{1}$$

Доказательство. Запишем число r в виде

$$r = \frac{p}{q},$$

где q — натуральное число, $q \geqslant 2$, а p — целое (положительное, отрицательиое или иуль).

Так как a — положительное число, то, используя определение степенн с рацнональным показателем и свойства корня степени q, получим, что

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} > 0,$$

т. е. верно неравенство (1) при $p = 1$.

Используя свойства степени положительного числа с целым показателем, имеем при любом целом p

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > 0,$$

т. е. неравенство (1) доказано.

Теорема 2. *Пусть a — положительное число, а r_1, r_2 и r — рациональные числа. Тогда справедливы свойства:*

1) При умножении степеней с рациональным показателем одного и того же положительного числа показатели степеней складывают:

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}. \tag{2}$$

2) Число a в степени $(-r)$ равно единице, деленной на a в степени r:

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}. \tag{3}$$

3) При делении степеней с рациональными показателями одного и того же положительного числа показатели степеней вычитают:

$$a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1 - r_2}. \tag{4}$$

4) При возведении степени с рациональным показателем положительного числа в рациональную степень показатели степеней перемножают:

$$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть r_1 и r_2 — рациональные числа. Запишем их в виде

$$r_1 = \frac{m}{n} \quad \text{и} \quad r_2 = \frac{k}{n},$$

где m и k — целые числа, n — натуральное число, $n \geqslant 2$. Используя определение степени с рациональным показателем, свойства арифметических корней и свойства степеней с целым показателем, получим:

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} =$$
$$= \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{n}} = a^{r_1+r_2},$$

т. е. равенство (2) доказано.

Теперь на основании свойства 1 имеем

$$a^r \cdot a^{-r} = a^0 = 1,$$

откуда и следует равенство (3).

Далее, в силу свойств 1 и 2

$$a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1} \cdot a^{-r_2} = a^{r_1+(-r_2)} = a^{r_1-r_2},$$

и равенство (4) тем самым доказано.

Теперь докажем равенство (5).

Пусть r_1 и r_2 — рациональные числа. Запишем их в виде

$$r_1 = \frac{m}{n} \quad \text{и} \quad r_2 = \frac{k}{l},$$

где m и k — целые числа, n и l натуральные числа, $n \geqslant 2$, $l \geqslant 2$. Используя определение степени с рациональным показателем и свойства арифметических корней, имеем

$$(a^{r_1})^{r_2} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{k}{l}} = \sqrt[l]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^k} = \sqrt[l]{(\sqrt[n]{a^m})^k} =$$
$$= \sqrt[l]{\sqrt[n]{a^{mk}}} = \sqrt[nl]{a^{mk}} = a^{\frac{m \cdot k}{n \cdot l}} = a^{r_1 \cdot r_2},$$

и равенство (5) доказано.

Теорема 2 доказана.

Примеры.

$$2^{-\frac{3}{4}} \cdot 2^{-\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}, \qquad 3^{\frac{1}{2}} : 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3},$$

$$\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^{-4} = 3^{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-4)} = 3^2 = 9.$$

Теорема 3. *Пусть a и b — положительные числа, а r — рациональное число. Тогда справедливы свойства:*

1) Степень с рациональным показателем произведения положительных чисел равна произведению тех же степеней сомножителей:

$$(ab)^r = a^r \cdot b^r. \tag{6}$$

2) Степень с рациональным показателем частного положительных чисел равна частному тех же степеней делимого и делителя:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}. \qquad (7)$$

Доказательство. Пусть $r = \frac{p}{q}$, где q — натуральное число, $q \geqslant 2$, а p — целое число. Тогда, используя определение степеии с рациональным показателем и свойства арифметических корней, получаем, что

$$(ab)^r = (ab)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(ab)^p} = \sqrt[q]{a^p \cdot b^p} =$$
$$= \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = a^r \cdot b^r,$$

и равенство (6) доказано.

Аналогнчно доказывается равенство (7).

Теорема 3 доказана.

Примеры.

$$(0{,}125)^{-\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = (0{,}125 \cdot 8)^{-\frac{2}{3}} = 1^{-\frac{2}{3}} = 1,$$
$$(4{,}4)^{\frac{1}{3}} : (0{,}55)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4{,}4}{0{,}55}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Теорема 4. *Пусть число $a > 1$, а r — рациональное число. Тогда*

$$a^r > 1 \quad \textit{при} \quad r > 0,$$
$$0 < a^r < 1 \quad \textit{при} \quad r < 0.$$

Доказательство. Запишем r в виде

$$r = \frac{p}{q},$$

где q ($q \geqslant 2$) — натуральное число, а p — целое число.

Если $a > 1$, то верно неравенство

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} > 1.$$

Еслн теперь $r > 0$, то $p > 0$ н

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > 1.$$

Еслн же $r < 0$, то $p = -|p| < 0$, $|p| > 0$ н

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{-|p|} = \frac{1}{\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{|p|}} < 1.$$

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть число $a > 1$, а рациональные числа r_1 и r_2 удовлетворяют неравенству*

$$r_1 < r_2. \tag{8}$$

Тогда

$$a^{r_1} < a^{r_2}. \tag{9}$$

Доказательство. Используя свойства степени с рациональным показателем, получаем, что

$$a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1}(a^{r_2 - r_1} - 1).$$

На основании теоремы 1 $a^{r_1} > 0$ для любого рационального числа r_1 (положительного, отрицательного или нуля), $a^{r_2 - r_1} - 1 > 0$ на основании теоремы 4, потому что $r_2 - r_1 > 0$. Следовательно, $a^{r_2} - a^{r_1} > 0$.

Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Если число a из интервала $0 < a < 1$, а рациональные числа r_1 и r_2 удовлетворяют неравенству*

$$r_1 < r_2,$$

то

$$a^{r_1} > a^{r_2}. \tag{10}$$

Доказательство. Если $0 < a < 1$, то $a^{-1} > 1$. Теперь, применяя теорему 5, имеем:

$$(a^{-1})^{r_1} < (a^{-1})^{r_2},$$

откуда

$$\frac{1}{a^{r_1}} < \frac{1}{a^{r_2}}. \tag{11}$$

Так как $a^{r_1} > 0$ и $a^{r_2} > 0$, то, умножая неравенство (11) на $a^{r_1} \cdot a^{r_2}$, получим справедливость неравенства (10).

Теорема 6 доказана.

Примеры.

1) $2^{\frac{1}{3}} < 2^{\frac{1}{2}}$, так как $2 > 1$ и $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, так как $0 < \frac{1}{2} < 1$ и $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

460°. Может ли быть отрицательным числом степень с рациональным показателем положительного числа?

461. По какому правилу: а) умножают; б) делят степени с рациональным показателем одного и того же положительного числа?

462. По какому правилу возводят в степень с рациональным показателем степень положительного числа?

463. Чему равна степень с рациональным показателем:
а) произведения положительных чисел;
б) частного положительных чнсел?

464. Если $a > 1$, то каким должно быть рацнональное число r, чтобы выполнялось неравенство:
а) $a^r > 1$; б) $a^r < 1$?

465. Сравните a^{r_1} и a^{r_2}, если $a > 1$ н рациональные числа r_1 и r_2 таковы, что $r_1 > r_2$.

466. Сравните a^{r_1} и a^{r_2}, если $0 < a < 1$ и рациоиальные числа r_1 н r_2 таковы, что $r_1 > r_2$.

Упростите выражение[1] **(467—473)**:

467. а) $x^{0,5} \cdot x^{0,25}$; б) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}}$; в) $x^{\frac{5}{8}} \cdot x^{-0,5}$; г) $b \cdot b^{-1\frac{2}{3}}$.

468. а) $a^{\frac{3}{5}} \cdot a$; б) $a^{\frac{3}{8}} \cdot a^{-\frac{3}{8}}$; в) $y^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{1}{3}}$; г) $z^{\frac{2}{3}} \cdot z^{\frac{3}{4}} \cdot z^{\frac{5}{6}}$.

469. а) $125^{1,5} \cdot 25^{-\frac{3}{4}}$; б) $2^{1,25} \cdot 16^{\frac{1}{16}}$; в) $x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{x}$; г) $\sqrt[3]{x} \cdot x^{\frac{1}{4}}$.

470. а) $a^{-\frac{1}{2}} : \sqrt{a}$; б) $z^{\frac{2}{3}} : \sqrt[5]{z^2}$; в) $\sqrt[4]{m} : m^{-\frac{1}{2}}$; г) $\sqrt[3]{a} : a^{-\frac{1}{6}}$.

471. а) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} \cdot a^{-\frac{1}{8}}$; б) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} : x^{-\frac{3}{16}}$.

472. а) $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3$; б) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^6$; в) $\left(b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{6}}$; г) $\left(y^{\frac{4}{7}}\right)^{\frac{21}{20}}$.

473. а) $\left(ab^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}$; б) $\left(x^{\frac{1}{3}}y\right)^{-1}$; в) $\left(3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$; г) $\left(2x^{\frac{4}{5}}y^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{3}{4}}$.

474. Вычнслите:

а) $\left(9^{-\frac{1}{4}} + (2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{9^{-1}} - (2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}\right)$;

б) $\left((5\sqrt{5})^{-\frac{2}{3}} + \sqrt[4]{81^{-1}}\right) \cdot \left((5\sqrt{5})^{-\frac{2}{3}} - 81^{-\frac{1}{4}}\right)$.

Упростите выраженне **(475—476)**:

475. а) $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)$; б) $\left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)$;

в) $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)$; г) $\left(m^{\frac{1}{2}} + 3\right)\left(m^{\frac{1}{2}} - 3\right)$.

476. а) $\left(2x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{3}}\right)\left(y^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}}\right)$; б) $\left(3m^{\frac{1}{4}} - n^{\frac{1}{4}}\right)\left(n^{\frac{1}{4}} + 3m^{\frac{1}{4}}\right)$;

в) $\left(x^{\frac{1}{6}} - 5\right)\left(x^{\frac{1}{6}} + 5\right)$; г) $\left(3^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{2}{3}}\right)\left(3^{\frac{1}{5}} + x^{\frac{2}{3}}\right)$.

---

[1] Здесь и далее буквами обозначены числа, для которых рассматриваемые выражения имеют смысл.

Представьте выражение в виде произведения (477—478):

477. а) $a-1$; б) $b-3$; в) $x-y$; г) $5-m$.

478. а) $4a-b^{\frac{1}{2}}$; б) $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$; в) $x^3-\sqrt{y}$; г) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

Например:

$$\sqrt{a}-b=a^{\frac{1}{2}}-\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^2-\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}}\right).$$

Представьте в виде суммы (479—481):

479. а) $\left(a^{\frac{1}{2}}+\sqrt{b}\right)^2$; б) $\left(x^{\frac{1}{3}}-y\right)^2$; в) $\left(m^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{2}}\right)^2$; г) $\left(c^{\frac{1}{6}}-d^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

480. а) $\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)$; б) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$.

481. а) $\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^3$; б) $\left(m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{2}{3}}\right)^3$.

Сократите дробь (482—483):

482. а) $\dfrac{a-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}-2}$; б) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+x}{3x^{\frac{1}{2}}+3}$; в) $\dfrac{(ab)^{\frac{1}{2}}-a}{\sqrt{a}}$; г) $\dfrac{\sqrt{2x}}{(2xy)^{\frac{1}{2}}+2x}$.

483. а) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; в) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y}{\sqrt[4]{x}-\sqrt{y}}$; г) $\dfrac{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$.

Упростите выражение (484—488):

484. $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+2}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-2}{a-1}\right)\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}}$.

485. $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{2}}}{x-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-3y^{\frac{1}{2}}}{x-y}\right)\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{2}$.

486. $\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}+\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$.

487. $\left(x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{6}}\left(y^{-\frac{5}{6}}-x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{2}}\right)\right)^{-\frac{3}{2}}$.

488. $\left(\dfrac{a+1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{a-1}{a-a^{\frac{1}{2}}}\right)^2$.

Сравните числа **(489—491)**:

489. а) $\sqrt[4]{15}$ и $\sqrt{3{,}9}$; б) $2\sqrt[3]{3}$ и $3\sqrt[3]{2}$;

в) $(2\sqrt{3})^{\frac{3}{2}}$ и $(3\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}$; г) $3\sqrt[3]{4}$ и $4\sqrt[3]{2}$.

490*. а) $8^{\frac{3}{2}}$ и $12^{\frac{3}{4}}$; б) $\sqrt[3]{12}$ и $\sqrt{5}$;

в) $12^{\frac{3}{2}}$ и $18^{\frac{2}{3}}$; г) $64^{\frac{4}{3}}$ и $36^{\frac{3}{2}}$.

491. а) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{8}}$ и $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$; б) $\frac{\sqrt[8]{2^5}}{\sqrt[6]{2}}$ и $\frac{\sqrt[4]{2^7}}{\sqrt[3]{2^4}}$;

в) $\frac{\sqrt[15]{3^{10}}}{\sqrt[10]{3^3}}$ и $\frac{\sqrt[14]{3^2}}{\sqrt[9]{3^2}}$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{6}}$ и $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{5}}$.

3. Исторические сведения

Как известно, греки знали квадратные корни задолго до новой эры. Способы извлечения корня степени n также известны давно. Например, хорезмский математик Бнруни (972—1048) в своей книге «Ключи к арифметике» описывает способ извлечения корня с любым натуральным показателем. Впрочем, способ этот громоздкий н неудобный. Начиная с XIII в. нтальянские и другие европейские математики обозиачали корень латинским словом Radix (корень) или сокращеино R. Так, Н. Шюке в XV в. писал $R^2 12$ вместо принятого теперь $\sqrt{12}$.

Немецкие математики в рукопнси 1480 г., написанной, как это было тогда принято, на латинском языке, обозначали корень квадратный знаком (◇), корень четвертой степени знаком (◇◇), кореиь кубический знаком (◇◇◇).

В 1626 г. нидерландский математик А. Жирар ввел близкое к современному обозначение для квадратных, кубических и т. д. корней: $\overset{2}{\vee}$, $\overset{3}{\vee}$, ... Выдающемуся нтальянскому математику Д. Кардано (1501—1576) принадлежат формулы решения кубических уравнений, в которых используются кубические корни.

Равенство $a^0 = 1$ (для $a \neq 0$) применял в начале XV в. самаркандский учеиый ал-Каши. Независимо от него нулевой показатель ввел и Н. Шюке.

В XVI в. фламандский ученый С. Стевин (1548—1620) предложил понимать $\sqrt[n]{a}$ как степень числа a с дробным показателем $\frac{1}{n}$, т. е. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. Систематически нулевые, отрицательные и дробные показатели стал примеиять И. Ньютон (1643—1727).

Рациональная степень числа позволнла определить показательную функцию $y = a^x$, существенный вклад в изучеиие которой виес Л. Эйлер (1707—1783).

Обобщив неравенство $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ на случай n положительных чисел, знаменитый французский математик О. Коши (1789—1857) доказал в 1821 г. неравенство

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}, \qquad (1)$$

называемое теперь неравенством Коши. Классическое доказательство неравенства Коши довольно трудное и здесь не приводится.

Числа $\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$ и $\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}$ называют соответственно средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n. Поэтому свойство, выраженное равенством (1), читают так:

Среднее арифметическое нескольких положительных чисел не меньше их среднего геометрического.

С помощью неравенства (1) можно доказать, например, что для любого натурального числа n верно неравенство

$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

4. Задания для повторения

Вычислите (**492—493**):

492. а) 2^5; б) 2^6; в) $(-2)^4$; г) $(-2)^5$;

д) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; е) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$; ж) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$; з) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3$.

493. а) $2^3:4^2-(-2)^3$; б) $(-3)^2+3^3:9^2$;

в) $(12{,}5)^2-\frac{1}{4}$; г) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2-\left(1\frac{1}{3}\right)^2$.

Пусть через a, b, c, m, n, x, y, z обозначены отличные от нуля числа, при которых выражения имеют смысл. Упростите выражения (**494—501**):

494. а) $a^3\cdot a$; б) $a^5\cdot a^7$; в) $x^{10}\cdot x^{10}$;

г) $x^0\cdot x^4$; д) $ab^2\cdot a^2b$; е) $a^2b^3\cdot a^5b^7$;

ж) $x^4y^5\cdot xy$; з) $x^0y^{10}\cdot x^0y^3$.

495. а) $x^4:x^3$; б) $x^2:x$; в) $m^{17}:m^8$; г) $m^{41}:m^{14}$;

д) $\frac{m^6}{m^3}$; е) $\frac{n^3}{n^3}$; ж) $\frac{a^{11}}{a^{42}}$; з) $\frac{b^{14}}{b^{14}}$.

496. а) $(a^2)^3$; б) $(x^3)^5$; в) $(-x^2)^3$; г) $(-a^3)^2$;

д) $(2x^2)^2$; е) $(3a^2)^3$; ж) $\left(\frac{1}{3}c\right)^4$; з) $(-2x^2)^3$.

497. а) $(a^5\cdot a^2\cdot a):(a^3\cdot a^7)$; б) $(x^4\cdot x^3\cdot x):(x^3\cdot x^6)$;

в) $(ab^2)^3:(a^2b^4)$; г) $(m^3n^5)^3:(m^9n^{15})$.

498. а) $m^{-1} \cdot m^2$; б) $x^{-2} \cdot x^{-3}$; в) $a^{-10} \cdot a^{-10}$;
г) $b^0 \cdot b^{-4}$; д) $y^3 : y-2$; е) $x^{-2} : x^{-3}$;
ж) $a^{-10} : a^{-10}$; з) $b^3 : b^{-4}$.

499. а) $(2ab^2c^3)^3$; б) $(3a^4x^5)^2$;
в) $(-(-a^2b^{-1})^{-1})^3$; г) $(2(-x^2y^3)^{-1})^{-2}$.

500. а) $\frac{48m^2ab}{26ma^2b^3}$; б) $\frac{64xy^3z^5}{18x^2yz^3}$;
в) $\frac{128a^0b^{-3}c^9}{32a^6b^{-2}c^{-9}}$; г) $\frac{121x^3y^0z^{-5}}{77x^{-8}y^{-4}z^{-2}}$.

501. а) $\frac{38a^7b^4c^{12}}{144ab^6c^3}$; б) $\frac{144xy^9z^{11}}{24x^5y^7z}$;
в) $\left(\frac{(5a^3(b+c))^2 \cdot (c-b)^2}{(b^2+2bc+c^2) \cdot 10a^4}\right)^{-1}$; г) $\frac{(-1(-2a)^2 \cdot b)^2}{(-2a^2)^3 \cdot b^4}$.

502. Сравните числа, укажите их положение иа координатиой оси:
а) $0{,}26$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; $(0{,}(24))^0$; б) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$; $-(0{,}(1))^0$; $-0{,}12$;
в) $(\sqrt{4})^2$; π^2; $(-1{,}2)^2$; г) $(-3)^2$; $\sqrt{81}$; $\frac{1008}{18}$.

503. Вычислите:
а) $\left(\frac{15}{\sqrt{6}-1} + \frac{4}{2-\sqrt{6}}\right) \cdot (\sqrt{6}+1)$;
б) $\left(\frac{4 \cdot 2^2 + 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}{8^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{24}\right)^{-1}} + (1-3^0)^2\right)^{-2}$.

504. Докажите неравенство:
а) $m + \frac{9}{m} \geqslant 6$, если m — положительное число;
б) $x - 1 \leqslant \frac{x^2}{4}$, если x — любое действительное число;
в)* $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

505. Разложите на миожители.
а) $x^2 - a^2x + \frac{1}{4}(a^4 - b^4)$; б) $4x^2 - 12bx - 4a^2 + 9b^2$;
в) $4x^2 - 3ax + \frac{1}{4}(2a^2 - ab - b^2)$; г) $8x^2 - \frac{2a}{b}(1-2b)x - \frac{a^2}{b}$;
д) $x^2 - \frac{a^2+b^2}{ab}x + 1$; е) $x^2 + \frac{a^2+b^2}{ab}x + 1$.

506. Найдите зиачение выражеиия:
а) $\left(1 - \frac{1}{1-x}\right) : \left(\frac{1-2x^2}{1-x} - x - 1\right)$ при $x = \frac{1}{2}$;
б) $\frac{m^2-m+1}{m^2-2m+1} : \left(m - \frac{1}{1-m}\right) - \frac{1}{m^2-m}$ при $m = 0{,}07$.

507. Докажите, что:

а) $5<\sqrt{26}$; б) $3<\sqrt{13}$; в) $\sqrt{7}<2{,}7$;

г) $\sqrt{11}<3{,}4$; д) $1{,}09<\sqrt{1{,}2}<1{,}1$; е) $1{,}4<\sqrt{2{,}1}<1{,}45$.

508. Какое из чисел больше:

а) π или $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ или $\sqrt{8}+\sqrt{2}$?

509. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{8}$; б) $\sqrt{28}$; в) $\sqrt{320}$; г) $\sqrt{32}$;

д) $\sqrt{175}$; е) $\sqrt{96}$; ж) $\sqrt{12\frac{1}{2}}$; з) $\sqrt{\frac{1}{0{,}75}}$.

510. Внесите множитель под знак корня:

а) $5\sqrt{0{,}6}$; б) $11\sqrt{\frac{2}{11}}$; в) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; г) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}$.

511. Пользуясь приближенным значением:

а) $\sqrt{2}\approx 1{,}41$, вычислите приближенно $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{\frac{1}{8}}$; $\sqrt{4{,}5}$;

б) $\sqrt{6}\approx 2{,}45$, вычислите приближенно $\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\sqrt{\frac{3}{8}}$.

512. Преобразуйте дробь таким образом, чтобы знаменатель не содержал числа под знаком корня:

а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{2}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; д) $\frac{1}{3+\sqrt{7}}$; е) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

Упростите выражение (**513—515**):

513. а) $\sqrt{8}+5\sqrt{9}-3\sqrt{8}+5\sqrt{7}+2\sqrt{8}-6\sqrt{7}$;

б) $7\sqrt{12}-5\sqrt{27}+8\sqrt{48}-6\sqrt{75}+2\sqrt{108}$;

в) $2\sqrt{3}-\sqrt{27}+3\sqrt{12}-2\sqrt{243}$; г) $\sqrt{50}-5\sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{128}$.

514. а) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$; б) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}$; в) $\sqrt{60}:\sqrt{5}$; г) $\sqrt{72}\cdot\sqrt{30}$.

515. а) $((7\sqrt{2}-5\sqrt{6})-(3\sqrt{8}-4\sqrt{24}))\cdot 3\sqrt{2}$;

б) $((2\sqrt{20}-7\sqrt{8})-(3\sqrt{5}-3\sqrt{18}))\cdot 4\sqrt{10}$.

516. Возведите выражение в степень:

а) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$; б) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$.

517. Докажите справедливость равенства[1]:

а) $\frac{\sqrt{a}+6}{a-36}-\frac{1}{\sqrt{a}+6}=\frac{12}{a-36}$; б) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-6}-\frac{3}{\sqrt{x}+6}+\frac{x}{36-x}=\frac{3}{\sqrt{x}-6}$.

518. Внесите множитель под знак корня:

а) $(a-1)\sqrt{\frac{3a}{1-a^2}}$, $0<a<1$; б) $(2-a)\sqrt{\frac{2a}{a-2}}$, $a>2$.

[1] Здесь и далее буквами обозначены числа, для которых рассматриваемые выражения имеют смысл.

519. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}+1\right):\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$; б) $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{1+\sqrt{a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}+1}{1-\sqrt{a}-a}$;

в) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$; г) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-7}-\frac{4}{\sqrt{m}+7}+\frac{m}{49-m}$.

520*. Докажите справедливость равенств

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{m}+\sqrt{n} \quad \text{и} \quad \sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{m}-\sqrt{n},$$

где $m=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}$, $n=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$.

521*. Используя равенство, рассмотренное в предыдущем задании, упростите выражение:

а) $\sqrt{8+\sqrt{28}}$; б) $\sqrt{9-\sqrt{17}}$; в) $\sqrt{7+2\sqrt{6}}$; г) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$.

522*. Укажите, если возможно, натуральное число, квадратный корень из которого заключен между:

а) 4000 и 4001; б) 400,0 и 400,1; в) 40,00 и 40,01;
г) 1002 и 1003; д) 100,2 и 100,3; е) 10,02 и 10,03.

523. Найдите число x, удовлетворяющее равенству:

а) $\sqrt{x}=-3$; б) $\sqrt{-x}=3$;

в) $\sqrt{2x+1}=2$; г) $\sqrt{1-x}=3$.

524. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}|x-1|+y=0,\\ 2x-y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}|y-4|=x,\\ 3x+y=1.\end{cases}$

525. Постройте график функции:

а) $y=x$; б) $y=-2x+1$; в) $y=\frac{1}{3}x-2$; г) $y=-2{,}5x-1$.

526. Найдите числа a и b, при которых прямые $x+y=-b$ и $x-ay-2=0$:

а) пересекаются в точке $(1;\ 1)$;
б) параллельны и не совпадают;
в) совпадают.

527. Постройте график функции $y=3x-1$. Замените x на y, а y на x и постройте график полученной функции в той же системе координат.

528. Постройте график функции $y=3x^2+1$. Найдите с помощью графика:

а) $y(1)$; б) $y(-2)$;
в) x_0, такое, что $y(x_0)=1$; г) x_0, такое, что $y(x_0)=2$.

529. Принадлежит ли точка $(-0{,}2;\ 0{,}4)$ графику функции $y=x^2$?

530. Решите графическим способом систему уравнений:

а) $\begin{cases}2x+y=4,\\ x-y=-1,\\ y=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y=2,\\ -2x+y=5,\\ 2x+3y=7.\end{cases}$

531. Запишите координаты и постройте точки, симметричные относительно оси Oy точкам:
а) $A(4;\ 3)$; б) $B(5;\ 0)$;
в) $C(-3;\ 2)$; г) $D(-6;\ 0)$.

532. Запишите координаты и постройте точки, симметричные относительно начала координат точкам:
а) $A(2;\ 5)$; б) $B(3;\ -1)$;
в) $C(-2;\ 5)$; г) $D(-4;\ -4)$.

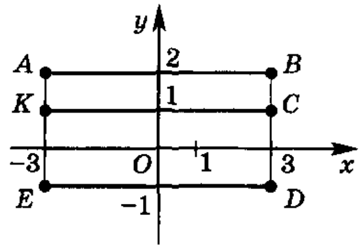


Рис. 53

533. На рисунке 53 отмечены точки A, B, C, D, E, K. Имеются ли среди них точки, симметричные относительно какой-либо оси координат (если имеются, то укажите ось симметрии); симметричные относительно начала координат?

534. Постройте графики функций $y = x$ и $y = x^2$. Имеются ли точки, принадлежащие графикам этих функций, обладающие свойством симметричности относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат?

535. Существуют ли x, такие, что $x^3 = x$?

536. Решите с помощью графиков уравнение:

а) $x^3 = x^2$; б) $x^4 = x^3$; в) $x^5 = x^2 - 4$; г) $x^3 - 1 = x^2$.

537. Решите с помощью графиков неравенство:

а) $x^3 > x$; б) $x^2 < x^5$; в) $x^4 > x^2$;

г) $\frac{1}{x} > x^2 - 4$; д) $\frac{1}{x} < x$; е) $x > \frac{1}{x} - 3$.

538. Постройте график функции:

а) $y = \frac{|x^3|}{x^2}$; б) $y = \frac{x^2}{|x^3|}$;

в) $y = x^4 + 1$; г) $y = x^3 - 1$.

539. Докажите, что функция $y = -x^3$ является убывающей.

540. Постройте график функции $y = (x - 1)^3$.

541*. Найдите значение аргумента, при котором значения функций $y = |x|$ и $y = 2x - 1$ равны между собой.

542. Выбрав удобный масштаб, постройте точки $(x;\ x^n)$ при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, если:

а) $x = 2$ и $x = -2$; б) $x = 3$ и $x = -3$;

в) $x = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{1}{2}$; г) $x = \frac{1}{3}$ и $x = -\frac{1}{3}$.

543. Упростите выражение:

а) $\sqrt{a^2}$; б) $\sqrt[4]{a^2}$; в) $\sqrt[4]{a^4}$; г) $\sqrt[4]{a^{12}}$.

544. Верно ли равенство $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 1 - x$, если $x \leqslant 1$?

545. При каких a и b верно равенство $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$?

Упростите выражение (**546—548**):

546. а) $\sqrt{-a} \cdot \sqrt[3]{a}$; б) $\sqrt[3]{-x^2} \cdot \sqrt[4]{-x}$;

в) $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$; г) $\sqrt{a-1} \cdot \sqrt[4]{1-a} \cdot (-\sqrt[3]{a-7})$.

547. а) $5\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{-54} - 6\sqrt[3]{-128} + 7\sqrt[3]{-250} + 2\sqrt[3]{432}$;

б) $7\sqrt[3]{24} + 5\sqrt[3]{81} + 4\sqrt[3]{-192} + 2\sqrt[3]{-375} - \sqrt[3]{1029}$.

548. а) $7\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x} - \sqrt[6]{x^2} + \sqrt{x^3}$;

б) $a + 2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[3]{a} - \sqrt[4]{a^2} - 3\sqrt[6]{a^2} - \sqrt[6]{a^3}$.

549. Сократите дробь:

а) $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}}$; б) $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}$;

в) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[3]{ax}-\sqrt[3]{ay}}$; г) $\dfrac{n\sqrt[3]{m}-m\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{n^2}+2\sqrt[3]{mn}}$.

550. Решите для $x \geqslant 0$ графическим способом уравнение:

а) $\sqrt[3]{x} = x$; б) $\sqrt[3]{x} = -x$; в) $\sqrt[3]{x} = x - 1$; г) $\sqrt[3]{x} = -x + 1$.

Упростите выражение (**551—552**):

551. а) $\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b^2}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{4b}{a}}$; б) $\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{\dfrac{xy^2}{2}} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{81}{4}} : (x^3y)$.

552. а) $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) \cdot \sqrt[3]{a^2}$; б) $(\sqrt[6]{a^2} - \sqrt[3]{a}) \cdot \sqrt[3]{a}$;

в) $(a\sqrt[3]{b} + b\sqrt[3]{a}) \cdot \sqrt[3]{a^2b^2}$; г) $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})$.

553. Найдите значение выражения:

а) $2\sqrt{5\sqrt{48}} + 3\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{15\sqrt{27}}$;

б) $30\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} + 3\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} + 5\sqrt[3]{144} + 2\sqrt[3]{0{,}125} + \sqrt[4]{0{,}0016}$.

554. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\sqrt{5}} \cdot (\sqrt[3]{\sqrt{5}} : \sqrt{\sqrt[4]{5}})^2$; б) $\left(\sqrt[3]{16\sqrt[4]{8\sqrt{2}}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{32\sqrt[4]{2}} \cdot \sqrt{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}}$.

555. Докажите справедливость равенства:

а) $\dfrac{3\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}{\sqrt{3\sqrt{5}-3\sqrt{2}}} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{3}+\sqrt[8]{2}} = (\sqrt[3]{3} - \sqrt[8]{2})(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

Найдите число *x*, удовлетворяющее равенству (**556—557**):

556. а) $\sqrt[3]{x} = -1$; б) $\sqrt[4]{x} = 2$;

в) $\sqrt[3]{x+1} = 2$; г) $\sqrt[3]{2x} - 1 = 0$.

557. а) $x^2 - 3x + 2 = (1 - x)\sqrt{x}$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = 1$.

Упростите выражение (**558—562**):

558. а) $\sqrt[3]{8^{-3}}$; б) $\sqrt[5]{4^{-5}}$; в) $\sqrt[4]{16^{-5}}$; г) $\sqrt[6]{64^{-3}}$;

д) $\sqrt[10]{3^{-5}}$; е) $\sqrt[12]{4^{-6}}$; ж) $\sqrt[6]{12^{-3}}$; з) $\sqrt[8]{3^{-4}}$.

559. а) $\sqrt{7^{-3}}\cdot\sqrt{7^5}$; б) $\sqrt[3]{4^7}\cdot\sqrt[3]{4^{-1}}$;

в) $\sqrt[4]{6^{-2}}\cdot\sqrt[4]{6^{-4}}$; г) $\sqrt[5]{3^{-8}}\cdot\sqrt[5]{3^{-2}}$.

560. а) $\sqrt[3]{5^{-3}}:\sqrt[3]{5^6}$; б) $\sqrt[4]{9}:\sqrt[4]{9^{-8}}$;

в) $\sqrt[6]{7^{-2}}:\sqrt[4]{7^{-4}}$; г) $\sqrt[8]{2^{-10}}:\sqrt[8]{2^{-12}}$.

561. а) $\sqrt[5]{3^3}\cdot\sqrt[3]{4^3}$; б) $\sqrt[7]{4^2}\cdot\sqrt[7]{4^6}$;

в) $\sqrt[3]{12^2}\cdot\sqrt[5]{3^4}$; г) $\sqrt[5]{7^4}\cdot\sqrt[5]{7^4}$.

562. а) $\dfrac{\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^8}}$; б) $\dfrac{\sqrt[4]{4^3}}{\sqrt[4]{4^5}}$; в) $\dfrac{\sqrt[3]{4^5}}{\sqrt[3]{4^{-1}}}$; г) $\dfrac{\sqrt[5]{9^2}}{\sqrt[5]{9^{-1}}}$.

Упростите выражение (**563—565**):

563. а) $\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}\right):\sqrt{\dfrac{a-b}{a}}$;

б) $\dfrac{a^2b^{-1}-a^{-2}b^3}{a^3b^{-1}+ab}:\dfrac{a^{-1}b-ab^{-1}}{a^3b^{-1}}$.

564. а) $(\sqrt[3]{108a^4b^{-1}}-\sqrt[3]{32a^{-2}b^5}):\sqrt[3]{4ab^2}$;

б) $\left(x^2y^3\sqrt[5]{\dfrac{243y^{-4}}{x^{-5}}}+\dfrac{y}{x^{-1}}\sqrt[5]{\dfrac{32x^{10}}{y^{-6}}}\right):\sqrt[5]{y^{-4}}$.

565. а) $\left(4\sqrt[3]{\dfrac{81x^9}{y^{-2}}}-\dfrac{2}{x^{-1}}\sqrt[3]{\dfrac{3y^2}{8^{-2}x^{-5}}}\right)\cdot\sqrt[3]{\dfrac{y}{3^{-2}}}$;

б) $\left(\sqrt[4]{\dfrac{128x^3}{y^{-6}}}+x^{-1}y\sqrt[4]{\dfrac{8y^2}{x^{-7}}}\right)\cdot\sqrt[4]{\dfrac{x^2}{4^{-1}y^{-3}}}$.

566. Найдите число x, удовлетворяющее равенству:

а) $x^{\frac{1}{3}}=2$; б) $x^{\frac{2}{3}}=3$; в) $x^{\frac{1}{5}}=-1$;

г) $x^{-\frac{1}{3}}=2$; д) $x^{-\frac{2}{3}}=1$; е) $x^{\frac{3}{5}}=-2$.

567. Упростите выражение:

а) $\left(m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}\right)\left(m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}\right)$; б) $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\right)$;

в) $\left(m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}\right)\left(m+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}+n\right)$; г) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)$.

568. Сократите дроби:

а) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$; б) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; в) $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x-y}$;

г) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a+b}$; д) $\dfrac{x-x^{0,5}y^{0,5}+y}{x^{1,5}+y^{1,5}}$; е) $\dfrac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a+a^{0,5}b^{0,5}+b}$.

569. Упростите выраженне:

а) $\dfrac{(x^{0,5}+y^{0,5})(x^{0,5}+5y^{0,5})-(x^{0,5}+2y^{0,5})(x^{0,5}-2y^{0,5})}{3\sqrt{y}\,(2\sqrt{x}+3\sqrt{y})}$;

б) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}-1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}-\sqrt[3]{x-1}$;

в) $\left(\dfrac{\frac{1}{x}-x}{\left(\sqrt[3]{x}+x^{-\frac{1}{3}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}-1\right)}+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}$;

г) $\sqrt{x}\left(\dfrac{x+\sqrt[4]{x^3y^2}+y\sqrt[4]{xy^2}+y^2}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt{y})^2}-y\right)^{-1}+\dfrac{1}{x^{-0,25}y^{0,5}-1}$.

Решите уравнение **(570—572)**:

570. а) $x(x+1)=\left|x+\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}$; б) $6x(x-1)+5\left|x-\frac{1}{2}\right|=-\frac{5}{2}$;

в) $x^2+5|x+2|=-4(x+2)$; г) $x^2+4x=2-|x+2|$.

571. а) $4x^4-11x^2-3=0$; б) $4x^4-7x^2-2=0$.

572. а) $x-\frac{4x}{4-x}=\frac{16}{x-4}$; б) $\frac{3x}{3-x}+\frac{9}{x-3}=x$;

в) $\frac{1}{x^2-10x+25}+\frac{10}{25-x^2}=\frac{1}{x+5}$; г) $\frac{2}{x^2+12x+36}-\frac{12}{36-x^2}=\frac{1}{x-6}$.

573. а) Если длнну прямоугольиика уменьшить на 1 м, а его ширину увеличить на 1 м, то площадь прямоугольиика увеличнтся на 5 м^2. На сколько метров длина прямоугольнника больше его ширнны?

б) Еслн бы папа был на 2 года моложе, а мама иа 2 года старше, то пронзведенне их возрастов было бы на 6 больше, чем сейчас. На сколько лет папа старше мамы?

574*. а) Обнаружнв в 64 метрах от себя уползающую черепаху, Ахиллес начал ее преследовать. Сократнв расстояние до черепахн в 8 раз и осознав свое превосходство, он прекратил погоню. Какой путь проделал Ахиллес с начала погоии, если его скорость в 15 раз больше скорости черепахн, причем двнженне Ахиллеса и черепахи происходило по прямой?

б) До приблнжающегося Ахнллеса оставалось еще 6 м, когда черепаха поняла, что ей не уйти от погонн, н она обречеиио остановнлась. Какой путь с начала погони проделала черепаха, еслн ее скорость в 17 раз меньше скорости Ахиллеса, расстояние между ннмн за время погони сократилось в 9 раз н нх движеине происходнло по прямой?

575. Под посев пшеннцы отведено 3 участка пашни, общая площадь которых в 3 раза больше площади второго участка. За день былн засеяны половина первого, $\frac{2}{3}$ второго н весь третнй участок. Площадь, оставшаяся незасеянной, в 2 раза меньше площади третьего участка. Какую часть отведеииой под посев площади составляет площадь, засеяниая за день?

576. На заводе сначала работали 2 цеха — первый и второй. Затем был пущеи третий цех, в результате чего завод увеличнл ежемесячный выпуск продукции в 1,6 раза. Во сколько раз больше продукции дает в месяц третий цех, если известно, что за 2 месяца первый и третий цеха вместе выпускают столько продукции, сколько второй за полгода?

577. Два иасоса различиой мощности, работая вместе, наполияют бассейн за 4 ч. Для наполиення бассейна наполовину первому насосу требуется время иа 4 ч большее, чем второму насосу для наполиеиия бассейиа на три четверти. За какое время может наполнить бассейн каждый из насосов в отдельиости?

578. Диаметр шкива электромотора, делающего 1200 оборотов в минуту, равеи 180 мм. Как иадо изменить диаметр шкива, чтобы при уменьшении числа оборотов до 1080 в минуту скорость движения приводного ремня не измеинлась?

579. Два шкнва соединены ременной передачей. Выразите формулой зависимость между длинами их окружностей C_1 и C_2 и числом оборотов r_1 и r_2, которые делают шкивы в едииицу времени. Выразите каждую из четырех величин через остальиые три.

580. Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении $1:2$, а другой содержит те же металлы в отношеиии $2:1$. Сколько частей каждого сплава надо взять, чтобы получить третий сплав, содержащий 50% каждого металла?

581. Груз весом 60 кг производит иекоторое давление на опору. Если вес груза уменьшить иа 10 кг, а площадь опоры — на 5 дм^2, то давлеиие увеличится на 1 кг/дм^2. Определите площадь опоры.

582*. Латуиь состоит из меди и цинка. Кусок латуни весом 124 г, погружениый в воду, теряет в весе 15 г, а кусок меди весом 89 г, погруженный в воду, теряет в весе 10 г. Кроме того, известно, что кусок цинка, погружеиный в воду, теряет $\frac{1}{7}$ веса. Определите, сколько меди и сколько цинка содержится в 250 г латуни.

583*. Сплав золота и серебра весом 13 кг 410 г при погружении в воду стал весить 12 кг 510 г. Определите количество золота и серебра в сплаве, если известно, что плотность золота равна 19,3 г/см^3, а серебра 10,5 г/см^3.

584. Теплоход за 10 ч может пройти 110 км по течению и 70 км против течения реки или 88 км по течению и 84 км против течения реки. Определите скорость теплохода относительно воды и скорость течения реки.

585. Путь из села в город идет сначала 15 км в гору, потом 6 км с горы. Велосипедист едет без остановок в гору с одной постоянной скоростью, с горы — с другой. В один коиец он

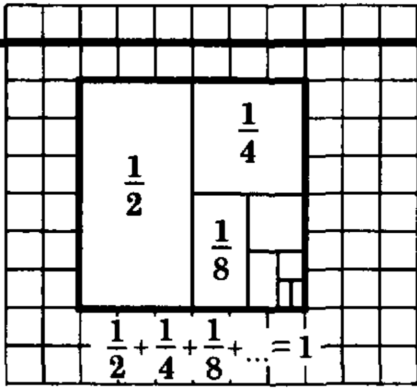
ехал 3,1 ч, обратно 2,5 ч. Какова скорость велосипедиста в гору и с горы?

586. *Старинная задача.* Для молотьбы хлеба были наняты несколько рабочих. Если бы их было тремя меньше, то они проработали бы двумя днями дольше. Если бы наняли четырьмя рабочими больше, то работа была бы окончена двумя днями раньше. Сколько было рабочих и сколько дней они проработали?

587. Грузовая машина выехала из A в B. Спустя 2 ч из B в A выехала легковая машина, которая прибыла в A на час позже, чем грузовая машина в B. Сколько часов была в пути грузовая машина, если к моменту встречи она проехала $\frac{2}{3}$ всего пути?

588. Велосипедист проехал расстояние от A до B и обратно с постоянной скоростью. Мотоциклист проехал расстояние AB со скоростью, в n раз большей, чем скорость велосипедиста. Он оставил мотоцикл в пункте B и вернулся в A пешком со скоростью, в n раз меньшей, чем скорость велосипедиста. Кто из них был дольше в пути и во сколько раз, если:

а) $n = 2$; б) $n = 5$?



ГЛАВА III

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 5. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ СВОЙСТВА

5.1. Понятие числовой последовательности

Если каждому натуральному числу n ($n = 1, 2, \dots$) поставлено в соответствие по некоторому закону число x_n, то говорят, что задана последовательность чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, \qquad (1)$$

или, короче, задаиа **числовая последовательность** $\{x_n\}$.

Числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ называют **членами последовательности**, а члеи с иомером n — ее **п-м членом**, его еще называют **общим членом**.

Задать последовательность — это значит указать закои, по которому можно вычислнть ее n-й член x_n для каждого натурального n.

Этот закон может выражаться разиыми способами: формулами, словесными описаниямн и т. п.

Рассмотрим числовую последовательность, n-й члеи которой задан формулой

$$x_n = n^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \dots). \qquad (2)$$

Пользуясь этой формулой, можно вычислить любой член последовательности (2), соответствующий данному конкретному номеру n. Например:

$x_4 = 4^2 = 16, \qquad x_{12} = 12^2 = 144, \qquad x_{17} = 17^2 = 289.$

Последовательность (2) записывают следующим образом:

$$1, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots,$$

или

$$1, 4, 9, \dots, n^2, \dots .$$

В этой записи приведено несколько первых членов последовательности и ее n-й член.

Пример 1. Пусть числовая последовательность запнсана в виде (1):

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{(-1)^n}{n},\ \ldots .$$

Тогда ее общий член задан формулой

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Пример 2. Пусть числовая последовательность задана формулой n-го члена:

$$x_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

Тогда ее можно записать следующим образом:

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{27},\ \frac{1}{256},\ \ldots,\ \left(\frac{1}{n}\right)^n,\ \ldots .$$

Иногда (в очевидных случаях) числовую последовательность задают ее несколькнми первыми членами, нмея в виду, что закономериость получения каждого следующего члена сохраняется н для всех остальных членов последовательностн.

Пример 3. Пусть числовая последовательность задана несколькими ее первымн члеиамн:

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots . \tag{3}$$

Тогда, очевидно, что формула ее n-го члеиа есть $a_n = 2n$.

Числовая последовательиость упорядочеиа: у каждого ее члена есть последующий член и у каждого ее члена, кроме первого, есть предшествующий члеи.

Пример 4. Пусть задана последовательность $\{a_n\}$: 1, 3, 5, 7, ... Тогда, например, у члена последовательности $a_3 = 5$ есть последующий член $a_4 = 7$ и есть предшествующий член $a_2 = 3$.

Замечанне. Числовую последовательность можно задать рекуррентио[1], т. е. задать однн или несколько первых членов последовательностн и формулу, выражающую любой ее член через один нлн несколько предшествующих. Например, последовательность (3) можно задать так:

$$a_1 = 2;\ a_{n+1} = a_n + 2,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots .$$

Известная последовательиость чисел Фибоначчи задается так: $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Вычнслим несколько первых ее членов:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots .$$

[1] Рекуррентный — от лат. recurrens (recurrentis) — возвращающийся.

589°. а) Что называют числовой последовательностью, членами числовой последовательности? Приведите примеры последовательностей.

б) Что значит задать числовую последовательность?

в) Какие способы задания числовых последовательностей вы знаете?

590. Дана последовательность чисел $\{x_n\}$: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

а) Назовите ее первый, второй, третий, четвертый, пятый и шестой члены.

б) Запишите формулу общего члена последовательности. Найдите x_7, x_8, x_{20}.

591. Запишите формулу общего члена последовательности:

а) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...; б) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 ...;

в) 4, 8, 12, 16, 20, 24, ...; г) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, ...$;

д) $1, -1, 1, -1, 1, -1, ...$; е) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, ...$.

592. Дана формула общего члена последовательности:

а) $a_n = 3n - 1$. Найдите a_1; a_2; a_5; a_{100};

б) $a_n = 3 + 2(n - 1)$. Найдите a_1; a_2; a_{12}; a_{20}.

593. Найдите сумму первых шести членов последовательности, заданной формулой общего члена:

а) $a_n = 3n + 2$; б) $a_n = (-1)^n \cdot n$.

594. Числовая последовательность $\{x_n\}$ задана формулой общего члена $x_n = 10 + 2n$.

а) Найдите x_1, x_{10}, x_{100}.

б) Запишите формулы последующего и предшествующего членов последовательности для x_n.

в) Запишите формулу члена последовательности, имеющего номер $n + 2$.

595. Последовательность задана формулой n-го члена:

а) $a_n = 3n - 2$; б) $b_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$; в) $c_n = (-2)^n$.

Вычислите три первых и десятый члены этой последовательности.

596. Последовательность задана первыми членами: 1, 5, 9, ... Запишите формулу ее общего члена.

597. Последовательность задана рекуррентным способом:

а) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3$; б) $b_1 = -2, b_{n+1} = 5 \cdot b_n$;

в) $c_1 = 4, c_{n+1} = c_n - 8$; г) $x_1 = 8, x_{n+1} = 0{,}25 \cdot x_n$.

Запишите пять первых ее членов.

598. Последовательность задана рекуррентным способом:

а) $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 2$; б) $b_1 = -5, b_{n+1} = 2 \cdot b_n$;

в) $c_1 = 8, c_{n+1} = c_n - 4$; г) $x_1 = 9, x_{n+1} = 0{,}3 \cdot x_n$.

Задайте последовательность формулой n-го члена, вычислите пять первых ее членов.

599. Последовательность задана первыми членами:
а) 5, 10, 15, 20, ...; б) 32, 16, 8, 4, ...; в) 2, −2, 2, −2, ...
Задайте последовательность рекуррентным способом, вычислите ее 8-й член.

600. В предыдущем задании задайте последовательность формулой n-го члена, вычислите ее 9-й член.

601. Числовая последовательность задана формулой n-го члена:

а) $a_n = 5n$; б) $b_n = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$; в) $c_n = (-0{,}5)^n$.

Задайте последовательность рекуррентным способом.

602. Последовательность задана формулой n-го члена:
а) $a_n = 177 - 3n$; б) $b_n = 125 - 7n$;
в) $x_n = 23 - 1{,}5n$; г) $y_n = 100 - \frac{n}{3}$.

Сколько положительных членов у этой последовательности?

603. Последовательность задана формулой n-го члена:
а) $a_n = -117 + 3n$; б) $b_n = -222 + 1{,}5\,n$;
в) $x_n = -237 + 5n$; г) $y_n = -100 + \frac{n}{7}$.

Сколько отрицательных членов у этой последовательности?

604. Найдите числа Фибоначчи: u_{10} и u_{15}.

605*. Докажите, что для любых натуральных n последовательность чисел Фибоначчи $\{u_n\}$ обладает свойством:
а) $u_1 + u_2 + ... + u_n = u_{n+2} - 1$;
б) $u_1 + u_3 + u_5 + ... + u_{2n-1} = u_{2n}$;
в) $u_2 + u_4 + u_6 + ... + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$;
г) $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + ... + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$.

5.2*. Свойства числовых последовательностей

Последовательность $\{x_n\}$, для которой при каждом натуральном n выполняется неравенство

$$x_n < x_{n+1},$$

называют **возрастающей** (строго возрастающей).

Каждый следующий член возрастающей последовательности больше предыдущего.

Примером возрастающей последовательности служит последовательность $\{a_n\}$, для которой

$$a_n = 3n, \quad a_{n+1} = 3(n+1) = 3n + 3.$$

Неравенство $a_n < a_{n+1}$ выполняется для каждого натурального n, так как $3n < 3n + 3$ при любом натуральном n.

Последовательность $\{x_n\}$, для которой при каждом натуральном n выполняется неравенство

$$x_n > x_{n+1},$$

называют **убывающей** (строго убывающей).

Каждый следующий член убывающей последовательности меньше предыдущего.

Примером убывающей последовательностн служит последовательность $\{c_n\}$, где

$$c_n = \frac{1}{n} \tag{1}$$

и $c_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Неравенство $c_n > c_{n+1}$ выполняется для каждого натуральиого n, так как

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

при любом натуральиом n.

Последовательиость $\{x_n\}$, для которой прн каждом натуральном n выполняется иеравенство

$$x_n \leqslant x_{n+1},$$

называют **иеубывающей**.

Примером неубывающей последовательности служит последовательиость чисел Фибоначчн.

Последовательность $\{x_n\}$, для которой прн каждом натуральиом n выполняется неравенство

$$x_n \geqslant x_{n+1},$$

называют **невозрастающей**. Примером невозрастающей последовательности служит последовательность $\{c_n\}$: 5, 5, 4, 4, ..., которую можно задать так:

$$c_{2n-1} = c_{2n} = 6 - n, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Последовательности возрастающие, убывающие, невозрастающне и неубывающие называют **моиотониымн**.

Рассмотренные выше последовательности и последовательность чисел Фибоначчи являются монотонными, а последовательность $\{y_n\}$, где

$$y_n = (-1)^n,$$

ие является монотонной, так как, например, $y_1 < y_2$, а $y_2 > y_3$.

Последовательность $\{x_n\}$ называют **ограничеиной сверху**, если существует такое чнсло B, что для каждого члена последовательности выполняется неравенство $x_n \leqslant B$.

Ограниченной сверху, например, является последовательность (1), так как для каждого ее члена выполняется неравенство $c_n \leqslant 1$.

Последовательность $\{x_n\}$ называют **огранночеиной снизу**, если существует такое чнсло A, что для каждого члена последовательности выполняется неравенство $x_n \geqslant A$.

Ограниченной снизу, например, является последовательиость чисел Фибоначчи, так как для каждого ее члена выполняется неравенство $u_n \geqslant 1$.

Последовательность $\{x_n\}$ называют **ограиичениой**, если она ограничеиа и снизу, н сверху.

Ограниченной, например, является последовательность (1), так как для каждого ее члена выполняется неравенство $0 < c_n \leqslant 1$.

З а м е ч а н и е. Числовая последовательность всегда имеет бесконечное число членов. Иногда бывает удобно рассматривать числовую последовательность с номерами ее членов, пробегающими конечное число значений 1, 2, ..., n. Тогда принято говорить, что задана **конечная последовательность** с числом членов n.

Например, последовательность простых чисел среди первых двадцати натуральных чисел конечна, она содержит 8 членов:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\ (n = 8).$$

Последовательность же всех простых чисел бесконечна. Этот факт был доказан еще Евклидом.

Последовательность $\{a_n\}$, заданная формулой n-го члена

$$a_n = 3n,$$

бесконечная — любому натуральному n соответствует член последовательности $3n$.

Этой же формулой можно задать конечную последовательность, если n принимает лишь несколько первых натуральных значений. Например, последовательность

$$b_n = 3n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

конечная. Она содержит 4 члена 3, 6, 9, 12.

Первый и последний члены конечной последовательности называют **крайними членами последовательности**.

606°. Какую последовательность называют:

а) невозрастающей; б) неубывающей;
в) монотонной; г) ограниченной сверху;
д) ограниченной снизу; е) ограниченной;
ж) возрастающей; з) убывающей?

Приведите примеры.

607. Последовательность задана формулой n-го члена:

а) $a_n = 7n - 11$; б) $b_n = 6^n$; в) $c_n = -3 + (1{,}2)^n$;
г) $a_n = 2 + 3n$; д) $b_n = 3 \cdot 2^n$; е) $c_n = -3 \cdot (0{,}2)^n$.

Докажите, что последовательность является возрастающей и ограниченной снизу.

608. Последовательность задана формулой n-го члена:

а) $a_n = -2n + 1$; б) $b_n = (0{,}2)^n$; в) $c_n = 3 - (1{,}1)^n$;
г) $a_n = 3 - 2n$; д) $b_n = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$; е) $c_n = -16 \cdot 2^n$.

Докажите, что последовательность является убывающей и ограниченной сверху.

609. Последовательность задана формулой n-го члена:

а) $a_n = (-2)^n$; б) $b_n = 2 \cdot (-1)^n$; в) $c_n = n \cdot (-1)^n$;

г) $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; д) $x_n = 2 + (-1)^n$; е) $y_n = (-1)^n$.

Покажите, что она не является монотонной. Какие из приведенных последовательностей являются ограниченными?

610. Придумайте свой пример последовательности:

а) монотонной; б) немонотонной;
в) ограниченной снизу; г) ограниченной.

611. Верно ли, что всякая возрастающая последовательность ограничена снизу, а всякая убывающая последовательность ограничена сверху?

612. Докажите, что последовательность десятичных приближений числа π с недостатком 3; 3,1; 3,14; 3,141; ... является ограниченной.

613*. Задайте формулой последовательность:

а) 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ...;
б) 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ...;
в) 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, ...

614*. Последовательность задана формулой n-го члена:

а) $a_n = \frac{n-1}{n}$; б) $b_n = \frac{2n+3}{2n+5}$; в) $x_n = \frac{3n+5}{4n+7}$; г) $y_n = \frac{4n-3}{2n-1}$.

Докажите, что последовательность является возрастающей и ограниченной.

615*. Последовательность задана формулой n-го члена:

а) $a_n = \frac{n+1}{n}$; б) $b_n = \frac{2n+5}{2n+3}$; в) $x_n = \frac{3n+4}{4n+1}$; г) $y_n = \frac{4n-1}{3n-2}$.

Докажите, что последовательность является убывающей и ограниченной.

616*. Последовательность задана формулой n-го члена:

а) $a_n = \frac{3n+5}{2n-1}$; б) $b_n = \frac{2n+1}{3n-5}$; в) $x_n = \frac{3n-5}{2n-1}$; г) $y_n = \frac{2n+1}{3n+5}$.

Является ли последовательность возрастающей, убывающей, ограниченной?

617*. Укажите все значения b, при которых последовательность, заданная формулой $a_n = \frac{1999n+b}{2000n}$, является:

а) возрастающей; б) убывающей.

§ 6. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

6.1. Понятие арифметической прогрессии

Арифметической прогрессией называют числовую последовательность, каждый последующий член которой равен предшествующему, сложенному с постоянным для данной последовательности числом. Это число называют **разностью арифметической прогрессии.**

Таким образом, если числовая последовательность $\{a_n\}$ есть арифметическая прогрессия, то для нее существует такое число d — разность арифметической прогрессии, что

$$a_{n+1} = a_n + d$$

для любого натурального числа n.

Например, последовательности

$$1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots, \qquad (1)$$

$$3, 1, -1, -3, \ldots, 5 - 2n, \ldots \qquad (2)$$

являются арифметическими прогрессиями. У арифметической прогрессии (1) разность $d = 1$, а у арифметической прогрессии (2) разность $d = -2$.

Отметим некоторые *свойства* арифметической прогрессии.

1. Для любой арифметической прогрессии $\{a_n\}$ ее n-й член a_n выражается через ее первый член a_1 и разность этой прогрессии d при помощи формулы

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

называемой формулой n-го члена арифметической прогрессии.

В самом деле

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$

. . . .

На $(n-1)$-м этапе этих рассуждений получим, что

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

2. Любой член арифметической прогрессии, кроме первого, есть среднее арифметическое предшествующего и последующего членов, т. е.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \text{ где } n = 2, 3, \ldots .$$

В самом деле, $a_{n-1} = a_n - d$, $a_{n+1} = a_n + d$, тогда

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - d + a_n + d}{2} = a_n.$$

Например, если известны два члена арифметической прогрессии $a_7 = -3$ и $a_9 = 1$, то можно найти a_8:

$$a_8 = \frac{a_7 + a_9}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1.$$

З а м е ч а н и е. Полное доказательство свойства 1 требует применения метода математической индукции (см. п. 1 Дополнений к главе III).

618°. а) Какую последовательность называют арифметической прогрессией?
б) Что называют разностью арифметической прогрессии?

619. Запишите формулу n-го члена арифметической прогрессии.

620. Какими свойствами обладает арифметическая прогрессия?

621. Дана последовательность $\{a_n\}$: 2; 7; 12; 22; 27; ... .
а) Определите разность между каждым последующим членом и предыдущим.
б) Является ли последовательность $\{a_n\}$ арифметической прогрессией?

622. Арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ задана формулой общего члена $a_n = a_1 + (n-1)d$, где $a_1 = 3$, $d = 2$. Найдите пять первых членов прогрессии.

623. Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$: 1; 7; 13; ... .
а) Найдите разность арифметической прогрессии.
б) Найдите a_7; a_8; a_9; a_{10}.

624. Является ли арифметической прогрессией последовательность:
а) -5; -2; 1; 1; 4; 7; 10; ...; б) 7; 0; -7; -14; -21; ...;
в) $1\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{3}$; $1\frac{1}{4}$; $1\frac{1}{5}$; $1\frac{1}{6}$; ...; г) -1; 4; 9; 14; 19; 24; ...?

625. Запишите четыре первых члена арифметической прогрессии, если $a_1 = 2$, $d = -3$.

626. Найдите пятый член арифметической прогрессии $\{a_n\}$: 2; $4\frac{1}{3}$; $6\frac{2}{3}$; ... .

627. В арифметической прогрессии $\{a_n\}$ найдите:
а) a_2 и d, если $a_3 = 5$; $a_4 = 9$;
б) a_1 и d, если $a_2 = 7$; $a_3 = 4$;
в) a_5 и d, если $a_6 = 8$; $a_4 = 12$;
г) a_7 и d, если $a_6 = -15$; $a_8 = -11$.

628. Докажите, что в арифметической прогрессии $\{a_n\}$ разность d можно вычислить по формуле

$$d = \frac{a_m - a_k}{m-k}, \ m \neq k.$$

В арифметической прогрессии $\{a_n\}$ найдите **(629—631)**:

629. а) a_2 и d, если $a_1 = 5$, $a_3 = 13$;
б) a_1 и d, если $a_2 = 3$, $a_{10} = 19$;
в) a_2 и d, если $a_{12} = -2$, $a_3 = 7$;
г) a_{101}, если $a_{12} = 20{,}5$, $a_7 = 10{,}5$.

630. а) $a_2 + a_9$, если $a_1 + a_{10} = 120$;
б) $a_1 + a_{21}$, если $a_2 + a_{20} = 24$;
в) a_3, если $a_1 + a_5 = 48$;
г) a_6, если $a_3 + a_9 = 160$.

631. а) a_{17}, если $a_{15} + a_{18} = 12$;
б) a_{20}, если $a_{19} + a_{21} = -20$;
в) a_5, если $a_3 + a_7 = 6$;
г) a_8, если $a_2 + a_{14} = 28$.

632. Является ли число 12 членом арифметической прогрессии:
а) $-10; -8; -6; ...$; б) $-11; -8; -5; ...$;
в) $-3; 0; 3; ...$; г) $44{,}5; 43; 41{,}5; ...$?
Если «да», то укажите его номер.

633. Является ли число 34 членом арифметической прогрессии $-47; -44; -41; ...$? Если «да», то укажите его номер.

634. Сколько положительных членов имеет арифметическая прогрессия:
а) $3{,}8; 3{,}5; 3{,}2; ...$; б) $7{,}1; 6{,}9; 6{,}7; ...$;
в) $14\frac{1}{3}; 13\frac{2}{3}; 13; ...$; г) $15\frac{3}{4}; 14\frac{1}{4}; 12\frac{3}{4}; ...$?

635. Сколько отрицательных членов имеет арифметическая прогрессия:
а) $-3{,}9; -3{,}7; -3{,}5; ...$; б) $-8{,}2; -7{,}9; -7{,}6; ...$;
в) $-18\frac{2}{3}; -15\frac{1}{3}; ...$; г) $-16\frac{1}{4}; -15\frac{1}{2}; ...$?

636. Докажите, что последовательность, заданная формулой общего члена:
а) $a_n = 3n - 7$; б) $a_n = -3n + 5$;
в) $a_n = 2n + 8$; г) $a_n = -2n - 3$,
является арифметической прогрессией.

637*. Верно ли, что арифметическая прогрессия:
а) возрастает и ограничена снизу, если $d > 0$;
б) убывает и ограничена сверху, если $d < 0$?

6.2. Сумма n первых членов арифметической прогрессии

Число, равное сумме первых n членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$, обозначают S_n, т. е.

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n.$$

Сумма первых n членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ равна произведению полусуммы первого и n-го ее членов на число ее членов, т. е. справедлива формула

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \qquad (1)$$

Действительно,

$$2S_n = S_n + S_n = (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (a_1 + a_2 + ... + a_n) =$$
$$= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_n + a_1).$$

Поскольку $a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$,

$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2d + a_n - 2d = a_1 + a_n$

и т. д., то получаем

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n.$$

Отсюда следует справедливость формулы (1).

Если в формуле (1) заменить a_n на $a_1 + (n-1)d$, то получим другую запись формулы для вычисления суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n. \qquad (2)$$

Пример 1. В арифметической прогрессии $\{a_n\}$ заданы первый член $a_1 = 11$ и пятнадцатый член $a_{15} = 27$. Вычислим сумму первых пятнадцати членов арифметической прогрессии.

По формуле (1) имеем

$$S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{11 + 27}{2} \cdot 15 = 285.$$

Пример 2. В арифметической прогрессии $\{a_n\}$ заданы первый член $a_1 = 9$ и разность $d = 2$. Вычислим сумму первых десяти членов арифметической прогрессии.

По формуле (2) имеем

$$S_{10} = \frac{2a_1 + (10-1)d}{2} \cdot 10 = (2 \cdot 9 + 9 \cdot 2) \cdot 5 = 180.$$

Замечание. Полное доказательство формулы (1) требует применения метода математической индукции (см. п. 1 Дополнений к главе III).

638. Запишите формулу для вычисления суммы первых n членов арифметической прогрессии по ее:

а) первому и n-му членам;

б) первому члену и разности прогрессии.

639. Вычислите сумму:

а) $1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$;

б) $30 + 31 + 32 + \ldots + 38 + 39 + 40$;

в) $11 + 12 + 13 + \ldots + 87 + 88 + 89$.

Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$. Вычислите (**640—642**):

640. а) S_{20}, если $a_1 = 1$, $a_{20} = 20$;

б) S_{30}, если $a_1 = -10$, $a_{30} = 20$;

в) S_{13}, если $a_1 = 17$, $a_{13} = 13$;

г) S_{17}, если $a_1 = 11$, $a_{17} = 19$.

641. а) S_{20}, если $a_1 = 1$, $d = 1$; б) S_{40}, если $a_1 = 2$, $d = 2$;

в) S_{11}, если $a_1 = -2$, $d = 4$; г) S_{15}, если $a_1 = -3$, $d = 3$.

642*. а) S_{10}, если $a_2 = 1$, $d = -2$; б) S_5, если $a_8 = 4$, $d = -1$;

в) S_{17}, если $a_9 = 2$; г) S_{19}, если $a_{10} = 4$.

643. а) Определите сумму первых 40 четных чисел.

б) Определите сумму всех трехзначных чисел.

в) Определите сумму всех натуральных чисел от 1 до 100, кратных 3.

644. Сложили несколько первых членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ и получили 430. Сколько членов сложили, если $a_1 = -7$, $d = 3$?

645. Сколько ударов сделают настенные часы за сутки, если они бьют только один раз в час, отбивая число часов?

646. а) В арифметической прогрессии $\{a_n\}$: $a_5 = 11$, $a_8 = 17$. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.

б) Придумайте задачу на нахождение суммы n членов арифметической прогрессии.

647*. а) Выразите сумму $(2n - 1)$ членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ через n и a_n.

б) Для арифметической прогрессии $\{a_n\}$ вычислите S_{2001}, если $a_{1001} = 2000$.

648. *Задача Пифагора (580—500 гг. до н. э.).* Найдите сумму n первых нечетных натуральных чисел:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1).$$

649. *Задача из папируса Ахмеса (XVIII—XVII вв. до н. э.).* Разделите 10 мер хлеба на 10 человек, если разность между количеством хлеба у каждого человека и ему предшествующего составляет $\frac{1}{8}$ меры.

650*. В арифметической прогрессии сумма m первых членов равна сумме n первых членов. Докажите, что сумма $(m + n)$ первых членов равна нулю.

§ 7. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

7.1. Понятие геометрической прогрессии

Геометрической прогрессией называют числовую последовательность, каждый последующий член которой равен предшествующему члену, умноженному на отличное от нуля, постоянное для данной последовательности число. Это число называют **знаменателем геометрической прогрессии**[1].

Таким образом, если последовательность $\{a_n\}$ есть геометрическая прогрессия со знаменателем q, то $q \neq 0$ и $a_{n+1} = a_n \cdot q$ для любого натурального числа n. Например, последовательности

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots,\ 2^n,\ \ldots, \qquad (1)$$

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots,\ (-1)^{n+1},\ \ldots, \qquad (2)$$

[1] Обычно рассматривают геометрические прогрессии с первым членом, отличным от нуля.

$$\frac{1}{7},\ -\frac{1}{21},\ \frac{1}{63},\ -\frac{1}{189},\ \ldots,\ \frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1},\ \ldots \qquad (3)$$

являются геометрическими прогрессиями. У геометрической прогрессии (1) знаменатель $q = 2$, у прогрессии (2) знаменатель $q = -1$, у прогрессии (3) знаменатель $q = -\frac{1}{3}$.

Отметим некоторые *свойства* геометрической прогрессии.

1. Для любой геометрической прогрессии $\{a_n\}$ ее n-й член a_n выражается через ее первый член a_1 и ее знаменатель q при помощи формулы

$$a_n = a_1\cdot q^{n-1},$$

называемой формулой n-го члена геометрической прогрессии.

В самом деле

$$a_2 = a_1\cdot q,$$
$$a_3 = a_2\cdot q = a_1\cdot q^2,$$
$$a_4 = a_3\cdot q = (a_1\cdot q^2)\cdot q = a_1\cdot q^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

На $(n-1)$-м этапе рассуждений получим, что

$$a_n = a_1q^{n-1}.$$

2. Любой член геометрической прогрессии с положительными членами, кроме первого, есть среднее геометрическое предшествующего и последующего членов, т. е.

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}.$$

В самом деле,

$$\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}} = \sqrt{\frac{a_n}{q}\cdot a_n\cdot q} = \sqrt{a_n^2} = a_n,$$

так как $a_n > 0$.

Например, если известны два члена геометрической прогрессии с положительными членами $a_7 = 32$ и $a_9 = 2$, то можно найти a_8:

$$a_8 = \sqrt{a_7\cdot a_9} = \sqrt{32\cdot 2} = 8.$$

Замечание. Полное доказательство свойства 1 требует применения метода математической индукции (см. п. 1 Дополнений к главе III).

651. а) Какую последовательность называют геометрической прогрессией? Что называют знаменателем геометрической прогрессии?

б) Запишите формулу n-го члена геометрической прогрессии. Какими свойствами обладает геометрическая прогрессия?

652*. Верно ли, что геометрическая прогрессия с положительными членами:

а) возрастает и ограничена снизу, если $q > 1$;

б) убывает и ограничена сверху, если $0 < q < 1$?

653*. Определите, возрастает или убывает геометрическая прогрессия $\{a_n\}$:

а) если $a_1 < 0$, $q > 1$; б) если $a_1 < 0$, $0 < q < 1$.

Является ли она ограииченной?

654. а) Задана последовательность $\{a_n\}$: 2; 4; 8; 16; ... . Определите частное от делення каждого последующего члена на предшествующий.

б) Является лн последовательность $\{a_n\}$ геометрической прогрессией?

655. а) Дана геометрическая прогрессия 1; 3; 9; 27; ... . Найдите знаменатель прогрессин и ее пятый, шестой и седьмой члены.

б) Геометрическая прогрессия задана формулой общего члена $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$. Найдите пять первых членов этой прогрессии.

656. Является ли геометрической прогрессией последовательность:

а) 1; 8; 15; 21; 26; ...; б) 4; 2; 1; 0,5; 0,25; ...;

в) −2; 2; −2; 2; −2; ...; г) 0; 4; 16; 64; 256; ...?

657. Запишите четыре первых члена геометрической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_1 = 2$, $q = 0{,}25$.

658. Найдите пятый член геометрической прогрессии 3; 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; ... .

659. Задана геометрнческая прогрессия $\{a_n\}$. Вычислите:

а) a_3, еслн $a_1 = 0{,}5$, $q = -2$; б) a_4, если $a_1 = -2$, $q = 3$;

в) a_3 и q, если $a_1 = 3$, $a_2 = 4$; г) a_3 и q, если $a_1 = -4$, $a_2 = 6$;

д) a_1 и q, если $a_2 = -1$, $a_3 = 2$; е) a_1 и q, если $a_2 = -3$, $a_3 = -2$;

ж) q, если $a_5 = 4$, $a_8 = 108$; з) q, если $a_4 = 5$, $a_7 = 320$.

660. Даны три последовательных члена геометрической прогрессии:

а) 7; x; 63. Найдите x, если $x > 0$;

б) 2; x; 18. Найдите x, если $x < 0$;

в) 3,2; x; 0,2. Найдите x.

661. а) Найдите a_1 и q геометрической прогрессни $\{a_n\}$, еслн:

а) $a_4 - a_2 = 18$ и $a_5 - a_3 = 36$;

б) $a_1 + a_4 = 30$, $a_2 + a_3 = 10$.

662. Докажите, что для любой геометрической прогрессии $\{b_n\}$ верно равенство:

а) $\frac{b_9 + b_{10}}{b_7 + b_8} = \frac{b_{11} + b_{12}}{b_9 + b_{10}}$; б) $\frac{b_5 + b_6 + b_7}{b_8 + b_9 + b_{10}} = \frac{b_{11} + b_{12} + b_{13}}{b_{14} + b_{15} + b_{16}}$.

663*. *Задачи И. Ньютона (1643—1727).* а) Даны четыре последовательиых члена геометрической прогрессии. Сумма двух крайних членов равна 13, двух средиих 4. Определите эти члены.

б) Даны три последовательных члена геометрической прогрессии. Их сумма равна 19, а сумма их квадратов 133. Определите эти члены.

7.2. Сумма n первых членов геометрической прогрессии

Число, равное сумме n первых членов геометрической прогрессии $\{a_n\}$, обозначают S_n, т. е.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Сумма первых n членов геометрической прогрессии $\{a_n\}$ со знаменателем q равна:

$$S_n = na_1 \text{ при } q = 1; \qquad (1)$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q} \text{ при } q \neq 1. \qquad (2)$$

В самом деле, при $q = 1$ формула (1) очевидна.

Пусть теперь $q \neq 1$. Справедливы очевидные равенства

$$S_n(1-q) = S_n - S_nq = a_1 + a_1q + \ldots + a_1q^{n-1} -$$
$$-(a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n) = a_1 - a_1q^n = a_1(1-q^n).$$

Следовательно,

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n),$$

и так как $q \neq 1$, то

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}.$$

Формула (2) доказана.

Заметим, что формулой (2) удобно пользоваться, если $q < 1$. Если же $q > 1$, то удобно пользоваться другой записью формулы (2):

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}. \qquad (3)$$

Пример 1. В геометрической прогресии $\{a_n\}$ $a_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$, вычислим сумму первых пяти ее членов.

По формуле (2) имеем

$$S_5 = \frac{a_1 \cdot (1-q^5)}{1-q} = \frac{8\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8 \cdot \frac{31}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{31}{2} = 15,5.$$

Пример 2. В геометрической прогрессии $a_1 = 8$, $q = 2$, вычислим сумму первых пяти ее членов.

По формуле (3) имеем

$$S_5 = \frac{a_1 \cdot (q^5-1)}{q-1} = \frac{8(2^5-1)}{2-1} = 248.$$

З а м е ч а н и е. Полное доказательство формулы (2) требует применения метода математической индукции (см. п. 1 Дополнений к главе III).

664. По какой формуле вычисляют сумму n первых членов геометрической прогрессии?

665. Найдите сумму пяти первых членов геометрической прогрессии, если:

а) $a_1 = 5$, $q = 2$; б) $a_1 = 4$, $q = -3$;

в) $a_1 = -2$, $q = \frac{1}{2}$; г) $a_1 = -\frac{1}{3}$, $q = -2$;

д) $a_2 = 4$, $a_3 = 7$; е) $a_3 = 2$, $a_1 = 1$.

666. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ вычислите S_6, если $a_1 = 48$, $q = -\frac{1}{2}$.

667. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ $a_1 = 1$, $q = -1$.
Вычислите: а) S_{100}; б) S_{101}.

668. Вычислите сумму первых десяти членов геометрической прогресии:

а) -32; 16; -8; 4; ...; б) 32; 16; 8; 4; ... .

669. В геометрической прогрессии $\{a_n\}$ вычислите:

а) S_{10}, если $a_1 = -\frac{1}{36}$, $q = 2$; б) S_{10}, если $a_1 = -\frac{1}{36}$, $q = -2$;

в) S_6, если $a_1 = -\frac{1}{27}$, $q = 3$; г) S_6, если $a_1 = -\frac{2}{27}$, $q = -3$.

670*. Вычислите сумму шести первых членов геометрической прогрессии, если:

а) разность между вторым и первым членами прогрессин равна 4, а между четвертым и третьим равна 16;

б) разность между вторым и первым членами прогрессии равна 3, а сумма трех ее первых членов равиа 21;

в) сумма трех первых членов прогрессии равна 111, а куб ее зиамеиателя равен 4.

671*. Сумма десяти члеиов геометрической прогрессии равна 64, произведение первого и десятого членов равио 16. Найдите сумму чисел, обратных членам этой геометрической прогрессии.

7.3*. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Геометрическую прогрессию

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

называют **бесконечно убывающей**, если модуль ее знамеиателя меньше 1: $|q| < 1$. Например, геометрическая прогрессия

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n},\ \ldots$$

бесконечио убывающая, потому что модуль ее знаменателя меньше 1:

$$|q| = \frac{1}{2} < 1.$$

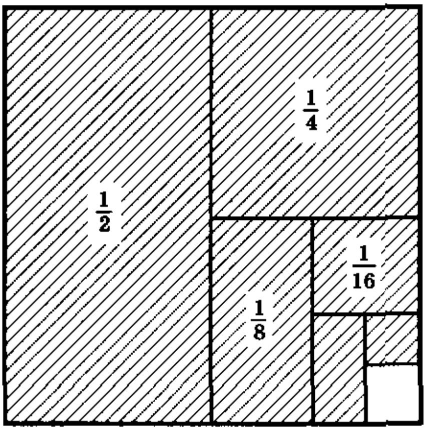


Рис. 54

Отметим, что для любой геометрической прогрессии формулу суммы n первых ее членов можно переписать так:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n. \qquad (1)$$

Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии второй член в правой части равенства (1) при неограниченном увеличении n стремится к нулю, но тогда левая часть равенства (1), т. е. S_n, стремится к числу

$$S = \frac{a_1}{1-q}. \qquad (2)$$

Это число $S = \frac{a_1}{1-q}$ называют **суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии**

$$a_1, \ a_2, \ \dots, \ a_n, \ \dots$$

со знаменателем q ($|q| < 1$).

Пишут:

$$\frac{a_1}{1-q} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

где

$$a_n = a_1 q^{n-1} (|q| < 1).$$

Пример 1. Вычислим сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессин

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \quad \dots .$$

Здесь $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$. По формуле (2) имеем

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Если рассмотреть квадрат, площадь которого принята за единицу, закраснть сначала $\frac{1}{2}$ квадрата, потом $\frac{1}{4}$, потом $\frac{1}{8}$, потом $\frac{1}{16}$, и т. д. (рис. 54), то станет ясно, что процесс такого закрашивания бесконечен и сумма площадей закрашенных частей квадрата неограниченно прнближается к площади данного квадрата (стремится к 1).

Пример 2. Вычнслнм сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots .$$

Здесь $a_1 = 1$, $q = -\frac{1}{2}$. По формуле (2) имеем

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}.$$

Иногда для обращения периодических дробей в обыкновенные используют формулу суммы бесконечио убывающей геометрнческой прогрессии. Покажем, как это делается, иа примерах.

Пример 3. Обратнм бесконечную периодическую дробь 0,(7) в обыкиовенную дробь.

Сначала запишем даиную дробь в виде

$$0,(7) = 0,777... = 0,7 + 0,07 + 0,007 + ... \qquad (3)$$

Правая часть этого равенства есть сумма бесконечно убывающей геометрнческой прогрессни $\{a_n\}$ с первым членом a_1=0,7 и знаменателем q = 0,1, поэтому по формуле (2) имеем

$$0,(7) = \frac{0,7}{1-0,1} = \frac{0,7}{0,9} = \frac{7}{9}.$$

Пример 4. Обратим бесконечиую периодическую дробь 0,1(45) в обыкновеиную дробь.

Сиачала запишем даиную дробь в виде

$$0,1(45) = 0,14545... = 0,1 + 0,045 + 0,00045 + ...$$

В правой части этого равеиства после 0,1 запнсаиа сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\{a_n\}$ с первым членом a_1=0,045 и знамеиателем q = 0,01.

Поэтому по формуле (2) имеем

$$0,1(45) = 0,1 + \frac{0,045}{1-0,01} = \frac{1}{10} + \frac{0,045}{0,99} = \frac{1}{10} + \frac{45}{990} = \frac{8}{55}.$$

З а м е ч а н и е. Поясним, почему справедливо равенство (3) и аналогичные равенства для других пернодических десятичиых дробей. Пусть задаиа геометрическая прогрессия

$$0,7;\ 0,07;\ 0,007;\ ...;\ 0,7\cdot(0,1)^{n-1};\ ... .$$

Тогда по формуле (2) имеем

$$S = \frac{0,7}{1-0,1} = \frac{0,7}{0,9} = \frac{7}{9}. \qquad (4)$$

Мы зиаем, что $\frac{7}{9}$ можио запнсать в виде бескоиечиой периодической десятичной дроби 0,(7) = 0,777... . Поэтому счнтают, что 0,(7) = 0,7 + 0,07 + 0,007 + ...

Тогда формула (4) есть формула обращения бесконечной периодической десятичной дроби 0,(7) в обыкновеиную дробь $\frac{7}{9}$.

672°. Какую геометрическую прогрессию называют бесконечно убывающей?

673*. Придумайте пример бесконечно убывающей геометрической прогрессии, которая не является убывающей последовательностью.

674. Вычислите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\{a_n\}$, если:

а) $a_1=4,\ q=\frac{1}{2}$; б) $a_1=4, q=-\frac{1}{2}$;

в) $a_1=5,\ q=\frac{1}{10}$; г) $a_1=5,\ q=-\frac{1}{10}$.

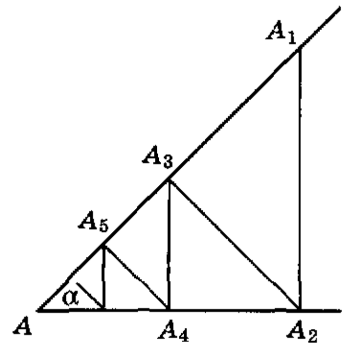


Рис. 55

675. Обратите в обыкновенную дробь бесконечную периодическую десятичную дробь:

а) 0,(3);	б) 0,(8);	в) 0,(5);
г) 0,(13);	д) 0,(27);	е) 0,(45);
ж) 0,(123);	з) 0,(456);	и) 0,(1999);
к) 0,5(7);	л) 0,23(8);	м) 0,2(38).

676*. *Задача П. Ферма (1601—1665).* Докажите, что для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\{a_n\}$, имеющей сумму S, выполняется равенство

$$\frac{S}{S-a_1}=\frac{a_1}{a_2}.$$

677*. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

а) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$; 1; $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; ...; б) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$; 1; $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; ... .

678*. Дан острый угол, величина которого равна α. На его стороне на расстоянии l от вершины отметили точку A_1. Из нее провели перпендикуляр A_1A_2 ко второй стороне угла, из точки A_2 провели перпендикуляр к первой стороне и т. д. (рис. 55). Получилась ломаная с бесконечным числом звеньев. Вычислите ее длину, если:

а) $l=1$ м, $\alpha=45°$; б) $l=1$ м, $\alpha=30°$.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ III

1. Метод математической индукции

Сформулируем **принцип полной индукции**.

Если свойство, зависящее от натурального n, во-первых, верно при $n=1$ и, во-вторых, из предположения, что оно верно при $n=k$, следует, что оно верно при $n=k+1$, то считают, что это свойство верно для любого натурального n.

Например, пусть надо доказать, что если $a > 0$, то

$$a^n > 0 \qquad (1)$$

для любого натурального n.

Согласно принципу полной индукции, чтобы считать верным неравенство (1) для всех натуральных n, достаточно проверить, что выполняются следующие два утверждения:

1) неравенство (1) справедливо для $n = 1$;

2) если допустить, что для некоторого $n = k$ неравенство (1) справедливо, т. е. имеет место неравенство $a^k > 0$, то оно справедливо и для $n = k + 1$, т. е. имеет место неравенство $a^{k+1} > 0$.

Утверждение 1 действительно выполняется, потому что, положив в неравенстве (1) $n = 1$, получим неравенство $a > 0$, верное по условию. Утверждение 2 тоже выполняется, ведь если предположить верным неравенство $a^k > 0$, то после умножения его на положительное число a получим верное неравенство $a^{k+1} > 0$.

Таким образом, утверждения 1 и 2 выполняются. Но тогда согласно принципу полной индукции неравенство (1) верно для любого натурального n.

Доказательство, основанное на принципе индукции, называют **доказательством по индукции** или **доказательством методом математической индукции**.

Заметим, что не только доказательство приведенного выше свойства, но и определение n-й степени, строго говоря, нужно давать по индукции.

Например, говорят, что a^n при натуральном n есть такое число, которое определяется следующим образом:

$$a^1 = a \quad \text{и} \quad a^{k+1} = a^k \cdot a \qquad (2)$$

для любого натурального k.

Пользуясь этим определением, получим, например, что

$$a^5 = a^4 \cdot a = a^3 \cdot a \cdot a = a^2 \cdot a \cdot a \cdot a = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a.$$

Пример 1. Докажем по индукции, что

$$0^n = 0 \qquad (3)$$

для любого натурального n. При $n = 1$ равенство (3) очевидно. Если допустить, что равенство $0^k = 0$ доказано, то отсюда будет следовать, что

$$0^{k+1} = 0^k \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0.$$

Тогда согласно принципу полной индукции равенство (3) надо считать верным для любого натурального n.

Пример 2. Докажем, что если $0 < a < b$, то

$$a^n < b^n \qquad (4)$$

для любого натурального n. Это утверждение доказывают по индукции следующим образом.

При $n = 1$ неравенство (4) верно, так как по условию $a < b$.

Пусть при $n = k$ неравенство (4) верно, т. е.

$$a^k < b^k. \qquad (5)$$

Так как по условию a — положительное число, то и a^k — положительное число, что было доказано выше. Умножив неравенство $a < b$ на a^k и неравеиство (5) на b, получим

$$a^{k+1} < a^k \cdot b \quad \text{и} \quad a^k \cdot b < b^{k+1},$$

откуда следует, что $a^{k+1} < b^{k+1}$. Тогда согласио принципу полной индукции неравенство (4) надо считать верным для любого иатурального n.

Пример 3. Докажем, что для любого числа $b \geqslant 1$ и любого натурального n справедливо неравенство

$$(1 + b)^n \geqslant 1 + nb. \qquad (6)$$

Действительно, так как $(1 + b)^1 = 1 + b$, то при $n = 1$ неравенство (6) выполняется.

Предположим, что иеравенство (6) выполняется при некотором $n = k$, т. е. что неравенство $(1 + b)^k \geqslant 1 + kb$ верно. Так как $1 + b \geqslant 0$, то

$$(1 + b)^{k+1} = (1 + b)^k \cdot (1 + b) \geqslant (1 + kb) \cdot (1 + b) =$$
$$= 1 + (k + 1)b + kb^2 \geqslant 1 + (k + 1)b,$$

т. е. мы доказалн иеравенство (6) для $n = k + 1$.
Следовательно, неравенство (6) верно при любом натуральном n.

Пример 4. Докажем равеиство

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (7)$$

для любых натуральиых m и n.

Зададим пронзвольное m и будем, как говорят, вести индукцию по n.

Прн $n = 1$ равенство (7) верно по определению степеии с натуральным показателем (см. (2)):

$$a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a = a^{m+1}.$$

Пусть теперь равенство (7) верно при $n = k$:

$$a^m \cdot a^k = a^{m+k}.$$

Тогда по определеиию степеии (см. (2)) имеем

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot a^k \cdot a^1 = a^{m+k} \cdot a^1 = a^{m+k+1},$$

т. е.

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^{m+k+1}.$$

Согласно прииципу полной индукции равенство (7) верно для любого натурального n при произвольно выбраниом m, т. е. равенство (7) верно для любых натуральных m и n.

Пример 5. Докажем, что общий член арифметнческой прогрессии $\{a_n\}$ вычисляется по формуле

$$a_n = a_1 + (n - 1)d. \qquad (8)$$

Действительно, так как $a_1 = a_1 + (1-1)d$, то при $n = 1$ равенство (8) выполняется.

Предположим, что равенство (8) выполняется при некотором $n = k$, т. е. что $a_k = a_1 + (k-1)d$. Тогда

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd,$$

т. е. равенство (8) выполняется для $n = k + 1$. Следовательио, равенство (8) верно прн любом натуральном n.

Пример 6. Докажем, что сумма n первых членов геометрнческой прогрессин ($q \neq 1$) вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}. \qquad (9)$$

Действительно, так как $S_1 = \frac{a_1(q^1 - 1)}{q - 1} = a_1$, то прн $n = 1$ равенство (9) выполняется.

Предположнм, что равенство (9) выполняется при некотором $n = k$, т. е. что $S_k = \frac{a_1(q^k - 1)}{q - 1}$. Тогда

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{a_1(q^k - 1)}{q - 1} + a_{k+1} = \frac{a_1(q^k - 1)}{q - 1} + a_1 q^k =$$

$$= \frac{a_1 q^k - a_1 + a_1 q^{k+1} - a_1 q^k}{q - 1} = \frac{a_1 q^{k+1} - a_1}{q - 1} = \frac{a_1(q^{k+1} - 1)}{q - 1},$$

т. е. равенство (9) выполняется для $n = k + 1$. Следовательно, равенство (9) верно при любом натуральном n.

679°. а) В чем заключается принцип полной ннлукцни?

б) Объясните, как доказывают утверждения методом математической индукции на прнмере доказательства равенства $1^n = 1$ для любого натурального n.

680. Докажнте методом математической индукции равенство:

а) $a^n b^n = (ab)^n$; б) $(a^n)^m = a^{mn}$.

681. Пусть $a < 0$. Докажите методом математнческой нндукцин, что:

а) $a^n > 0$ при четном иатуральном n;

б) $a^n < 0$ при нечетном натуральном n.

682. Докажнте методом математической нндукции, что:

а) общий член геометрической прогрессии вычисляется по формуле $a^n = a_1 \cdot q^{n-1}$;

б) сумма n первых членов арнфметнческой прогрессни вычисляется по формуле $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

683*. Докажнте методом математнческой нндукции, что для любого натурального n выполняется равенство:

а) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(n+1)n}{2}$;

б) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$;

в) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$;

г) $3 + 12 + \ldots + 3 \cdot 4^{n-1} = 4^n - 1$;
д) $4 + 0 + \ldots + 4 \cdot (2 - n) = 2n(3 - n)$;
е) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;
ж) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$;
з) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$;
и) $\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(n+3) \cdot (n+4)} = \frac{n}{4(n+4)}$;
к) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$;
л) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$.

Указание. Доказать равеиство $A(n) = B(n)$ для любого натурального n методом математической индукции можно так:
1) Убедиться, что равенство $A(1) = B(1)$ выполняется.
2) Доказать равенство

$$A(k + 1) - A(k) = B(k + 1) - B(k). \qquad (*)$$

3) Теперь из предположения $A(k) = B(k)$ и нз равенства (*) следует, что $A(k + 1) = B(k + 1)$. Тогда согласно принципу полной индукции доказываемое равенство верно для любого натурального n.

684*. Докажите методом математической индукцни, что для любого натурального n выполняется неравенство:
а) $1 + 2 + 3 + \ldots + n < n^2$;
б) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n < (n + 1)^2$;
в) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n+1} > \frac{1}{2n}$;
г) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}$;
д) $4^n > 7n - 5$;
е) $2^n > 5n + 1$, $n \geqslant 5$.

685*. Докажите, что при всех натуральных n выполняется равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

686*. Докажите, что при всех натуральных n выполняется равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

687*. *Задача ал-Караджи (Иран, XI в.).* Докажите, что при всех натуральиых n выполняется равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

688*. *Задача ал-Каши (XIV—XV вв.).* Докажите, что для любого иатурального n верио равенство

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{1}{30}(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n).$$

689*. *Задача Фаульхабера (Германия, 1580—1635).* Докажите что для любого натурального n верно равенство

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 =$$
$$= \frac{1}{12}(2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2).$$

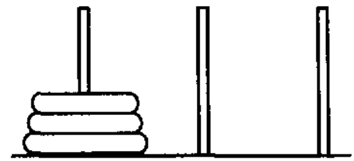


Рис. 56

690*. Докажите, что при всех натуральных n:
а) $5^n + 3$ делится на 4; б) $7^n + 5$ делится на 6;
в) $4^n + 6n - 1$ делится на 9; г) $5^n + 4n - 1$ делится на 8.

691*. Докажите, что:
а) $7^n + 9$ делится на 8 при всех нечетных натуральных n;
б) $3^n + 7$ делится на 8 при всех четных натуральных n.

692*. На один из трех штырьков насажены n различных колец так, что большее кольцо лежит ниже меньшего (на рисунке 56 $n = 3$). За один ход разрешается перенести одно кольцо с одного штырька на другой, при этом не разрешается большее кольцо класть на меньшее. Докажите, что наименьшее число ходов, за которое можно перенести все кольца с одного штырька на другой, равно $2^n - 1$.

2. Исторические сведения

Слово «прогрессия» латинское (progressio), оно означает «движение вперед» (как слово «прогресс»).

С начала нашей эры известна следующая задача-легенда: «Индийский царь Шерам позвал к себе изобретателя шахматной игры, своего подданного Сету, чтобы наградить его за остроумную выдумку. Сета, издеваясь над царем, потребовал за первую клетку шахматной доски 1 пшеничное зерно, за вторую — 2 зерна, за третью — 4 зерна и т. д. Оказалось, что царь не был в состоянии выполнить это «скромное» желание Сеты».

В задаче надо найти сумму 64 членов геометрической прогрессии

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots,\ 2^{63}$$

с первым членом 1 и знаменателем 2. Эта сумма равна

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Такое количество зерен пшеницы можно собрать лишь с урожая планеты, поверхность которой примерно в 2000 раз больше поверхности Земли.

Задачи на геометрические и арифметические прогрессии встречаются у вавилонян, в египетских папирусах, в древнекитайском трактате «Математика в 9 книгах». Так, в одной из клинописных табличек вавилонян предлагается найти сумму первых девяти членов геометрической прогрессии

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \ldots,\ 2^{n-1},\ \ldots .$$

Вот другая задача, которую решали в Древнем Вавилоне во втором тысячелетии до новой эры: «10 братьев, $1\frac{2}{3}$ мины серебра. Брат над братом поднимается, на сколько поднимается, не знаю. Доля восьмого 6 шекелей. Брат над братом — на сколько он выше?»

Здесь требуется по сумме первых десяти членов арифметической прогрессии $1\frac{2}{3}$ мины (1 мина = 60 шекелей) и известному восьмому члену определить разность арифметической прогрессии.

В папирусе Ахмеса предлагается задача: «У семи лиц по семи кошек, каждая кошка съедает по семи мышей, каждая мышь съедает по семи колосьев, из колоса может вырасти по семи мер ячменя. Как велики числа этого ряда и их сумма?»

Отметим также, что Архимед знал, что такое геометрическая прогрессия, и умел вычислять сумму любого числа ее членов. Правило нахождения суммы членов арифметической прогрессии впервые встречается в «Книге абака» (1202) Леонардо Пизанского. Формула для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии была известна П. Ферма (XVII в.).

В старорусском юридическом сборнике «Русская правда» (X—XI вв.) содержатся выкладки количества зерна, собранного с определенного участка земли; некоторые из них содержат вычисление суммы геометрической прогрессии со знаменателем 2.

Интересные задачи на прогрессии есть в «Арифметике» Магницкого. Вот одна из таких задач: «Некто продавал коня и просил за него 1000 рублей. Купец сказал, что за коня запрошена слишком большая цена. «Хорошо,— ответил продавец,— если ты говоришь, что конь дорого стоит, то возьми его себе даром, а заплати только за одни гвозди в его подковах. А гвоздей во всякой подкове по 6 штук. И будешь ты мне за них платить таким образом: за первый гвоздь полушку (0,25 копейки), за второй гвоздь заплатишь две полушки, за третий гвоздь — четыре полушки и так далее за все гвозди: за каждый в два раза больше, чем за предыдущий». Купец же, думая, что заплатит намного меньше чем 1000 рублей, согласился. Проторговался ли купец, и если да, то на сколько?»

3. Задания для повторения

693. Вычислите:

а) $\dfrac{(35{,}814 : 7{,}05 + 2{,}12) \cdot 0{,}15}{1{,}6 + 187{,}5 : (16{,}25^2 \cdot 3{,}75 - 3{,}75^3)}$;

б) $\dfrac{(0{,}73^3 - 0{,}73 \cdot 0{,}27^2) : 0{,}023 + 2{,}4}{(18{,}544 : 3{,}05 - 1{,}83) \cdot 0{,}16}$.

694[1]**.** Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{4(a-2)}{a^2-a-6} + \dfrac{a-3}{4-a^2}\right) \cdot \dfrac{a^2-4}{a-1} - \dfrac{2}{a-3}$;

[1] Здесь и далее буквами обозначены числа, для которых рассматриваемые выражения имеют смысл.

б) $\frac{3}{y-2}+\frac{3y+12}{25-y^2}:\left(\frac{2y-1}{y^2-25}-\frac{y-5}{2y^2+9y-5}\right)$;

в) $\left(\frac{a}{a^2-4}-\frac{8}{a^2+2a}\right)\cdot\frac{a^2-2a}{4-a}+\frac{a+8}{a+2}$;

г) $\left(\frac{1}{a^2-4a}+\frac{a+3}{a^2-16}\right)\cdot\frac{4a-a^2}{a+2}+\frac{a+8}{a+4}$;

д) $\left(\frac{a+3b}{(a-b)^2}+\frac{a-3b}{a^2-b^2}\right):\frac{a^2+3b^2}{(a-b)^2}$;

е) $\left(\frac{a+2b}{(a+b)^2}-\frac{a-4b}{a^2-b^2}\right):\frac{b^2+2ab}{(a+b)^2}$.

695. Решите уравнение:

а) $\frac{2}{(2x-1)(x+2)}-\frac{x}{5(x+2)}=\frac{2}{2x-1}$;

б) $\frac{4}{(3x-1)(x+1)}-\frac{2x}{3x+3}=\frac{3}{3x-1}$.

696. Определнте, прн каких значеннях x выражение имеет смысл, упростите выраженне:

а) $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$;

б) $\frac{1-x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}-\frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^{-2}-x}{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}$.

697*. *Задача Архимеда (287—212 гг. до н. э.).* Найдите сумму квадратов первых n натуральиых чисел.

698*. а) Найдите сумму квадратов n первых четных чисел.
б) Найдите сумму квадратов n первых нечетных чисел.

699*. *Старинная задача (Индия, IV в.).* Найдите сумму кубов n первых натуральных чисел.

700. Найдите целое число — значеиие выражения:

а) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}-\sqrt{8+2\sqrt{7}}$;

в) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$; г) $\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{10-4\sqrt{6}}$.

701. Найдите значение p, при котором корни уравнения $2x^2-5x+p=0$ удовлетворяют условию

$$\frac{x_2^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}=\frac{65}{8}.$$

702. Найдnте положительное значение q, при котором кории уравнення $2x^2+qx-18=0$ удовлетворяют условню

$$\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}=\frac{65}{324}.$$

703. Найдите значение p, при котором корни уравнения $6x^2 + 3x - p = 0$ удовлетворяют условию

$$x_1 \cdot x_2^4 + x_2 \cdot x_1^4 = \frac{63}{8}.$$

704. *Задача Бхаскары (Индия, XII в.).* Докажите, что $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

705. *Задачи М. Штифеля (Германия, 1486—1567).*

а) Проверьте равенство $\sqrt{16} + \sqrt[3]{8} = \sqrt{\sqrt[3]{4096}} + \sqrt{\sqrt[3]{64}}$.

б) Упростите выражение $\sqrt[3]{45 + \sqrt{1682}}$.

706. При каких значениях b неравенство неверно при любом x:
а) $3x^2 - bx - 1 < 0$; б) $x^2 + bx + 4 < 0$?

707. При каких значениях m неравенство не имеет решений:
а) $x^2 - 4x + m < 0$; б) $x^2 + 2x + m < 0$;
в) $x^2 - mx + 4 < 0$; г) $x^2 + mx + 9 < 0$?

Покажите штриховкой все точки координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют условию **(708—710)**:

708. а) $x \geqslant 2$; б) $y \leqslant 3$; в) $x \geqslant 2$ и $y \leqslant 3$;
г) $x \geqslant 2$ или $y \leqslant 3$; д) $x \leqslant -1$ или $y \geqslant 1$;
е) $\begin{cases} |x| \leqslant 2, \\ |y| \leqslant 2; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} |x| \geqslant 2, \\ |y| \geqslant 2; \end{cases}$
з) $x^2 + y^2 \leqslant 4$; и) $x^2 + y^2 \geqslant 1$;
к) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x^2 + y^2 \geqslant 1; \end{cases}$ л) $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4$.

709. а) $x < -3$; б) $y > -1$; в) $x < -3$ и $y > -1$;
г) $x < -3$ или $y > -1$; д) $x > -3$ или $y < -1$;
е) $\begin{cases} |x| < 3, \\ |y| < 3; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} |x| > 3, \\ |y| > 3; \end{cases}$
з) $x^2 + y^2 < 9$; и) $x^2 + y^2 > 4$;
к) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 9, \\ x^2 + y^2 > 4; \end{cases}$ л) $(x+1)^2 + (y+2)^2 > 4$.

710. а) $\begin{cases} y \geqslant -2x + 1, \\ y \geqslant x - 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \leqslant -x^2 + 4, \\ y \geqslant x + 2. \end{cases}$

711*. Укажите все точки координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(|x| - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1$$

или системе неравенств

$$\begin{cases} (|x| - 1)^2 + (|y| - 1)^2 \geqslant 1, \\ |x| + |y| \leqslant 1. \end{cases}$$

712*. Докажите неравенство:

а) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3$, если $a>0$, $b>0$, $c>0$;

б) $\frac{a^3+b^3}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, если $a>0$, $b>0$;

в) $(a+b)^4 \geqslant 8a^4+8b^4$;

г) $(a+2)(b+2)(a+b) \geqslant 16ab$, если $a>0$, $b>0$;

д) $ab(a+b) \leqslant a^3+b^3$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$;

е) $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ac)$, если a, b и c — стороны некоторого треугольника.

713. Укажите наименьший член последовательности $\{x_n\}$, заданной формулой:

а) $x_n=n^2-6n+5$; б) $x_n=n^2-18n+1$;

в) $x_n=3n^2-16n-1$; г) $x_n=7n^2-50n$.

714. *Из «Курса чистой математики» Е. Д. Войтяховского.* Служившему воину дано вознаграждение за первую рану 1 к., за вторую 2 к., за третью 4 к. и т. д. Всего воин получил 655 р. 35 к. Спрашивается число его ран.

715. Группа туристов вышла из города A в направлении города B, удаленного от города A на a км. В первый день группа прошла 40 км, а в каждый следующий день она проходила на 1 км больше, чем в предыдущий. Через t дней из города B в том же направлении вышла вторая группа туристов, которая в первый день прошла 30 км, а в каждый следующий день проходила на 2 км больше, чем в предыдущий. Через сколько дней после своего выхода первая группа догонит вторую, если:

а) $a=100$, $t=1$; б) $a=114$, $t=2$;

в) $a=91$, $t=1$; г) $a=131$, $t=2$?

716. Вычислите:

а) $1+2+3+4+\ldots+17+18+19$;

б) $30+31+32+\ldots+47+48+49+50$.

717. Для любого натурального n вычислите сумму

$$3+8+13+\ldots+(5n-2).$$

718. Найдите сумму пятнадцати первых членов арифметической прогрессии, второй член которой равен 0,5, а четырнадцатый равен −33,5.

719. Найдите сумму пятидесяти пяти первых членов арифметической прогрессии, последний член которой равен 5,8, а сумма двух последних равна 11,5.

720. Найдите разность арифметической прогрессии, четвертый член которой равен 1,25, а девятый равен $\frac{5}{6}$.

721. Сумма членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из тридцати членов, равна 3645. Первый член этой прогрессии равен 20. Найдите второй член прогрессии.

722. Сумма всех членов конечной арифметической прогрессии равна 28, третий член равен 8, а четвертый равен 5. Найдите число членов прогрессии и ее крайние члены.

723. а) Найдите сумму всех двузначных чисел, кратных 2 или 3.
б) Найдите сумму всех трехзначных чисел, не кратных 7.

724. Найдите сумму всех трехзначных чисел, кратных 3, но не кратных 2.

725. Сумма 40 первых членов арифметической прогрессии равна 340, а сумма 39 первых ее членов равна 325. Найдите разность прогрессии.

726. Даны две арифметические прогрессии: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$. Является ли арифметической прогрессией последовательность:

а) $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots$;
б) $a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n, \ldots$;
в) $a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots, a_n \cdot b_n, \ldots$;
г) $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|, \ldots$;
д) $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \ldots$ (все $b_i \neq 0$)?

727. Докажите, что если числа $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{b+a}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, то числа a^2, b^2, c^2 также являются последовательными членами арифметической прогрессии.

728. Числа a, b, c и числа $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ являются последовательными членами арифметических прогрессий. Докажите, что $a = b = c$.

729. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, если известно, что:
а) $a_2 + a_4 = 16$, $a_1 \cdot a_5 = 28$; б) $a_1 \cdot a_{11} = 44$, $a_2 + a_{10} = 24$.

730. Найдите сумму всех двузначных чисел, не кратных ни 2, ни 3.

731. Запишите первые 11 членов геометрической прогрессии, если известно, что ее знаменатель равен 1,5, шестой член равен 2.

732. Определите первый член геометрической прогрессии, если ее знаменатель равен 4, а восьмой член равен 256.

733. Первый член геометрической прогрессии равен 2058, а четвертый член равен 6. Найдите знаменатель этой прогрессии.

734. Между числами 1 и 14 641 найдите три числа, которые вместе с заданными числами являются последовательными членами геометрической прогрессии.

735. 15 и 240 — крайние члены конечной геометрической прогрессии. Знаменатель этой прогрессии равен 0,5. Сколько членов в этой прогрессии?

736. Найдите сумму членов конечной геометрической прогрессии, знаменатель которой равен 3, а крайние члены равны 20 и 131 220.

737. Первый член конечной геометрической прогрессии равен 7, знаменатель равен 4. Найдите последний член прогрессии, если сумма всех членов равна 9555.

738. Найдите последний член конечной геометрической прогрессии, если известно, что сумма первых двух членов равна 4, разность этих же членов равна 2, число членов прогрессии равно 8.

739. Знаменатель конечной геометрической прогрессии, состоящей из семи членов, равен 2, сумма всех членов равна 635. Найдите последний член прогрессии.

740. Первый член конечной геометрической прогрессии, состоящей из шести членов, равен 768, последний член прогрессии меньше четвертого в 16 раз. Найдите сумму всех членов прогрессии.

741. Первый член конечной геометрической прогрессии равен $\frac{3}{4}$, последние два члена равны соответственно 750 и 7500. Найдите число членов прогрессии.

742. Первый член конечной геометрической прогрессии равен 1, последний равен 64, сумма всех членов равна 127. Найдите число членов прогрессии.

743. Двенадцатый член геометрической прогрессии равен 1536, четвертый член равен 6. Найдите сумму первых одиннадцати членов этой прогрессии.

744. В геометрической прогрессии седьмой член равен 27, десятый член равен 729. Найдите сумму первых десяти членов геометрической прогрессии.

745. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, в которой сумма первых двух членов равна 16, а сумма пятого и шестого членов равна 1296.

746. Запишите первые восемь членов геометрической прогрессии, в которой произведение первых двух членов равно $\frac{1}{3}$, а произведение первого члена на пятый равно $\frac{1}{64}$.

747. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 28, сумма следующих трех членов равна 3,5. Найдите восьмой член прогрессии.

748. Найдите сумму пяти членов геометрической прогрессии, если известно, что первый член равен 9, а сумма трех первых членов равна 58,59.

749. Несколько одноклассников организовали турнир по шашкам. Каждый участник турнира сыграл с каждым по одной партии, а всего было сыграно 28 партий. Сколько было участников турнира?

750*. Шесть мальчиков и четыре девочки организовали турнир по шашкам. Каждый участник турнира сыграл с каждым по одной партии. За выигрыш присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Девочки вместе набрали 40 очков. Кто выиграл больше очков: мальчики у девочек или девочки у мальчиков — и на сколько?

751*. В турнире по шахматам каждый участник сыграл с каждым по две партии. За выигрыш в партии присуждали 1 очко, за ничью — $\frac{1}{2}$ очка, за проигрыш — 0 очков. Три лучших игрока набрали вместе 24 очка, что составило половину от числа очков остальных участников, вместе взятых. Сколько было участников турнира?

752*. Несколько учащихся 9 «А» и 9 «Б» классов организовали турнир по шашкам. Каждый участник турнира сыграл с каждым по одной партии. За выигрыш присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Учащиеся 9 «А» класса вместе набрали 26 очков, а учащиеся 9 «Б» класса, которых было на 3 больше, набрали очков поровну. Сколько было участников турнира?

753. а) В нашем классе 32 человека. 23 человека любят кошек, 18 человек — собак. Причем 10 человек любят и кошек, и собак. Сколько человек нашего класса не любят ни кошек, ни собак?

б) В нашем классе 30 учащихся. На экскурсию в музей ходили 23 человека, в кино и музей — 6 человек, а 2 человека не ходили ни в кино, ни на экскурсию. Сколько человек нашего класса ходили в кино?

754*. В нашем классе 20 учащихся любят либо физику, либо математику, либо оба эти предмета. Среди любителей физики 50% любят математику, а среди любителей математики 25% любят физику. Сколько учащихся нашего класса любят и физику, и математику?

755*. а) Сколько чисел от 1 до 100 не делится ни на 3, ни на 5?

б) Сколько чисел от 1 до 100 не делится ни на 6, ни на 8?

756*. Среди абитуриентов, выдержавших приемные экзамены в вуз, оценку «отлично» получили: по математике — 96 абитуриентов, по физике — 74, по русскому языку — 84, по математике или физике — 150, по математике или русскому языку — 152, по физике или русскому языку — 132, по всем трем предметам — 8. Сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятерку? Сколько среди них получивших только одну пятерку?

757*. Нарисовали ромбы и прямоугольники. Ромбов — в 2 раза больше, чем прямоугольников. Число ромбов, не являющихся прямоугольниками, в 3 раза больше числа прямоугольников, не являющихся ромбами.

а) Определите наименьшее возможное число фигур.

б) Во сколько раз квадратов было меньше, чем ромбов?

в) Сколько квадратов нарисовали, если всего нарисовали 20 фигур?

758*. Колонна солдат длиной l м движется со скоростью x м/мин. Из конца колонны в ее начало отправляется сержант со скоростью y м/мин, затем с той же скоростью он возвращается в конец колонны. На путь туда и обратно сержант затратил t мин.

а) Выразите t; l; x; y через остальные величины.

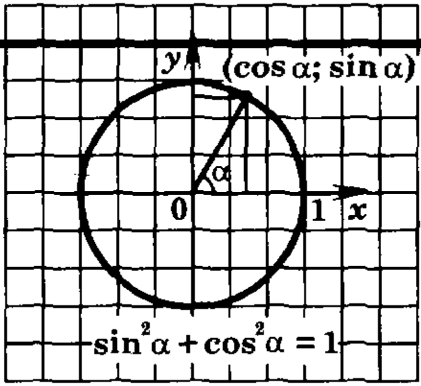
б) Вычислите t, если $l = 510$, $x = 70$, $y = 100$.

759*. Колоина солдат длиной l движется с постоянной скоростью по шоссе. Курьер из коица колонны отправился в ее начало. Достигнув иачала колонны, он тут же повериул обратно и пошел в коиец колоины с той же скоростью. За это время колоина прошла расстояиие s. Определите расстояние, которое прошел курьер в оба конца, еслн:

а) $l = 400$ м, $s = 300$ м; б) $l = 300$ м, $s = 400$ м.

760*. Колонна солдат длиной l движется с постояниой скоростью по шоссе. Курьер из конца колонны отправился в ее начало. Достигиув иачала колонны, он тут же повернул обратно и пошел в конец колонны с той же скоростью. Известио, что скорость курьера в n раз больше скорости колонны. Определите путь колонны за то время, которое курьер потратил на путь в оба конца, если:

а) $l = 250$ м, $n = 1{,}5$; б) $l = 300$ м, $n = 2$.



ГЛАВА IV

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

§ 8. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС УГЛА

Слово «тригонометрия» греческое, оно переводится как «измерение треугольников». Как известно из геометрии, синус, косинус, тангенс и котангенс угла используются при решении треугольников, поэтому формулы для них называются тригонометрическими.

В курсе геометрии они рассматривались для углов, не больших развернутого. В этой главе обобщено понятие угла и на него распространены понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

8.1. Понятие угла

Введем на плоскости прямоугольную систему координат xOy с положительной полуосью абсцисс Ox, направленной вправо, и с положительной полуосью ординат Oy, направленной вверх, и рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат. Пусть положительная полуось Ox пересекает окружность в точке A, и пусть на окружности дана еще точка B. Векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ образуют угол AOB (рис. 57, *а*).

Будем считать, что наряду с фиксированными векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ есть еще вектор, начало которого — точка O, а конец — точка, движущаяся по окружности. Этот вектор назовем **подвижным вектором**.

Используя язык механики, можно сказать, что угол AOB получен поворотом подвижного вектора от вектора $\overline{OA}$ до вектора $\overline{OB}$ (на рисунке 57, *б* стрелка показывает, как двигался подвижный вектор).

Отметим, что угол AOB образован поворотом, при котором конец подвижного вектора, двигаясь по окружности, прошел дугу, не большую полуокружности (рис. 57, *б*).

Однако можно совершить и такой поворот, при котором конец подвижного вектора, двигаясь по окружности, пройдет дугу, большую чем полуокружность (рис. 58, *а*).

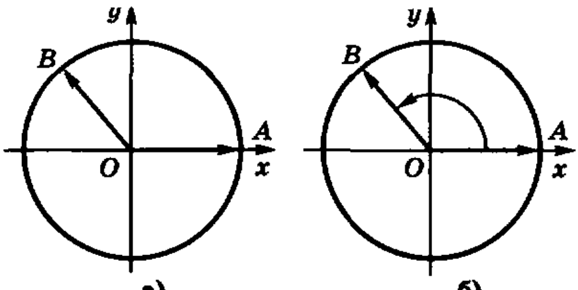


Рис. 57

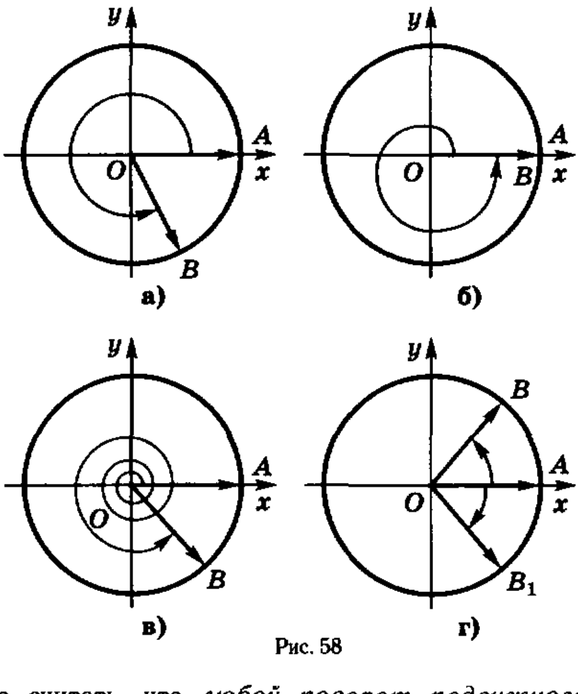


Рис. 58

Принято считать, что *любой поворот подвижного вектора образует угол.*

При повороте подвижного вектора может образоваться угол, меньший развернутого (рис. 57, *б*), и угол, больший развернутого (рис. 58, *а*).

Пусть подвижный вектор совершил такой поворот, что впервые его конечное положение (вектор $\overline{OB}$) совпало с начальным положением (вектором $\overline{OA}$). Такой поворот называют **полным оборотом** (рис. 58, *б*).

Поворот подвижного вектора может складываться из нескольких полных оборотов и поворота, составляющего часть полного оборота (рис. 58, *в*).

Любой поворот подвижного вектора может быть совершен в двух противоположных направлениях: по часовой стрелке и против часовой стрелки (рис. 58, *г*).

Принято считать углы, образованные поворотом подвижного вектора против часовой стрелки, **положительными**, а углы, образованные поворотом подвижного вектора по часовой стрелке, **отрицательными**.

Если подвижный вектор не совершил поворота, то будем считать, что образован **нулевой угол**.

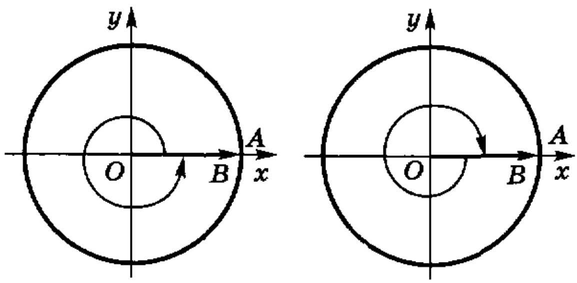
Пусть подвижный вектор совершил поворот, равный $\frac{1}{360}$ части полного оборота против часовой стрелки. В этом случае говорят, что образован *угол, градусная мера которого равна одному градусу*, или, короче, угол в один градус (пишут: 1°).

Следовательно, совершив полный оборот против часовой стрелки, получим угол в 360° (рис. 59, *а*), а совершив один полный оборот по часовой стрелке, получим угол в −360° (рис. 59, *б*).

Совершив поворот в половину полного оборота против часовой стрелки, получим угол в 180° (рис. 60, *а*); совершив поворот в четверть полного поворота по часовой стрелке, получим угол в −90° (рис. 60, *б*).

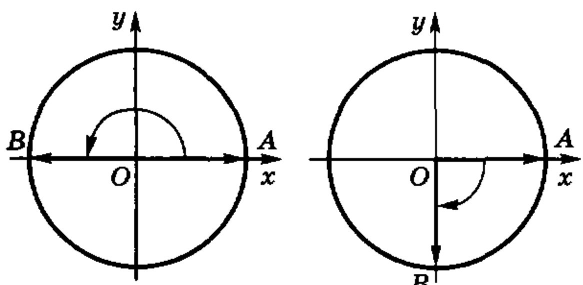
Поскольку

$$450° = 90° + 360°,$$



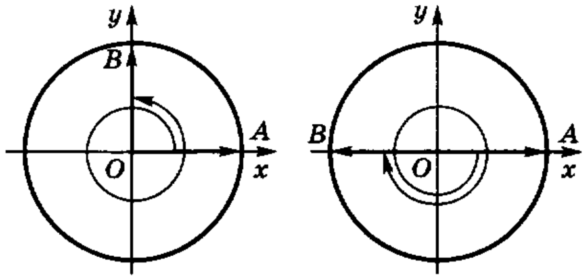
а) б)

Рис.59



а) б)

Рис. 60



а) б)

Рис. 61

то, совершив поворот в четверть полного оборота против часовой стрелки, а затем еще полный оборот против часовой стрелкн, получим угол в 450° (рис. 61, *а*).

Поскольку $-540° = -180° - 360°$, то, совершив поворот в половину полного оборота по часовой стрелке, а затем еще полный оборот по часовой стрелке, получим угол в $-540°$ (рис. 61, *б*).

Напомним, что 1′ (одиа минута) равна $\frac{1}{60}$ частн градуса, а 1″ (одна секунда) равна $\frac{1}{60}$ частн минуты.

Для любого действительного числа a существует, и притом только один, угол, градусная мера которого равна a.

Отметим, что величину любого угла a можно записать в виде

$$a = a_0 + 360° \cdot k,$$

где a_0 удовлетворяет неравенствам $0° \leqslant a_0 < 360°$, а k — некоторое целое чнсло.

Поэтому при $k \neq 0$ угол с градусной мерой a можно получить как результат двух поворотов: 1) в положительном направлении на угол с градусной мерой a_0 и 2) на $|k|$ полных оборотов в положительном направленни при $k > 0$ и в отрицательном при $k < 0$.

Пример 1. Так как $2000° = 200° + 5 \cdot 360°$, то угол в 2000° можно получить как результат двух поворотов: 1) в положительном направлении на 200° и 2) в положительном направленнн на 5 полных оборотов.

Пример 2. Так как $-2000° = 160° - 6 \cdot 360°$, то угол в $-2000°$ можно получить как результат двух поворотов: 1) в положительном направленни иа 160° и 2) в отрицательном направленни на 6 полных оборотов.

Замечание. Из предыдущего ясно, что только в случае, когда угол, рассматриваемый в тригонометрии, неотрицателен н не больше развернутого, его можно отождествить с углом, рассматриваемым в геометрии.

Поэтому введеиное выше понятие угла является обобщением понятия угла, рассматриваемого в геометрии.

761°. Какой поворот называют полным оборотом?

762°. а) Какой угол называют нулевым; положительным; отрицательным?

б) Что такое угол в один градус? Сколько градусов содержит полный оборот?

763°. Для любого ли числа a существует угол, градусная мера которого равна a?

764. На рисунке 62 изображен угол AOB, полученный поворотом подвижного вектора от вектора $\overline{OA}$ до вектора $\overline{OB}$. Сколько полных оборотов содержит угол AOB?

765. Изобразите на координатной плоскости угол AOB, полученный поворотом против часовой стрелки подвижного вектора от вектора $\overline{OA}$ до вектора $\overline{OB}$ на:

а) $\frac{1}{2}$ полного оборота; б) 0,25 полного оборота;

в) $\frac{3}{4}$ полного оборота; г) 1,75 полного оборота;

д) -1 полный оборот; е) $-2{,}5$ полного оборота.

С помощью транспортира изобразите на координатной плоскости угол AOB, полученный поворотом подвижного вектора от вектора $\overline{OA}$ до вектора $\overline{OB}$ на угол, градусная мера которого равна **(766—767)**:

766. а) 60°; б) 120°; в) 200°; г) 245°;
д) 270°; е) 300°; ж) 380°; з) 420°.

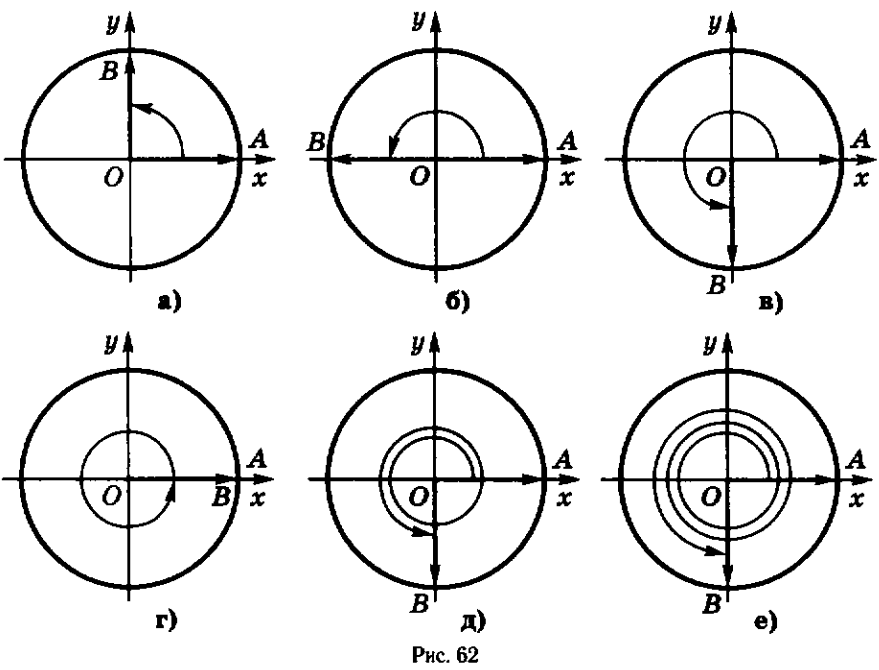


Рис. 62

767. а) $-45°$; б) $-30°$; в) $-120°$; г) $-160°$;
д) $-270°$; е) $-300°$; ж) $-500°$; з) $-1000°$.

768. Запишите градусиую меру угла AOB, изображеиного на рисунке 63.

769. Сколько полных оборотов и в каком направлении содержит угол, градусная мера которого равна:
а) $700°$; б) $-320°$; в) $2000°$; г) $3800°$;
д) $-600°$; е) $-800°$; ж) $-1500°$; з) $-2400°$?

770. Определнте по рисунку 64, *а* наименьшую по абсолютной величиие градусную меру углов AOB, AOC, AOD.

771. Определите по рисунку 64, *б — г* наименьшую по абсолютной величине градусную меру углов AOB, AOC, AOD, AOE.

772. Постройте без помощн транспортнра в коордннатной плоскости углы:
а) $90°$, $180°$, $270°$, $360°$; б) $45°$, $135°$, $225°$, $315°$;
в) $60°$, $120°$, $240°$, $300°$; г) $30°$, $150°$, $210°$, $330°$;
д) $-45°$, $-90°$, $-135°$, $-180°$; е) $-60°$, $-120°$, $-240°$, $-300°$.

773. Укажите несколько положительных н отрицательных углов, образованных такими поворотами, при каждом нз которых угол между начальным н конечным положением подвижного вектора равен $30°$, $-45°$, $60°$, $-90°$.

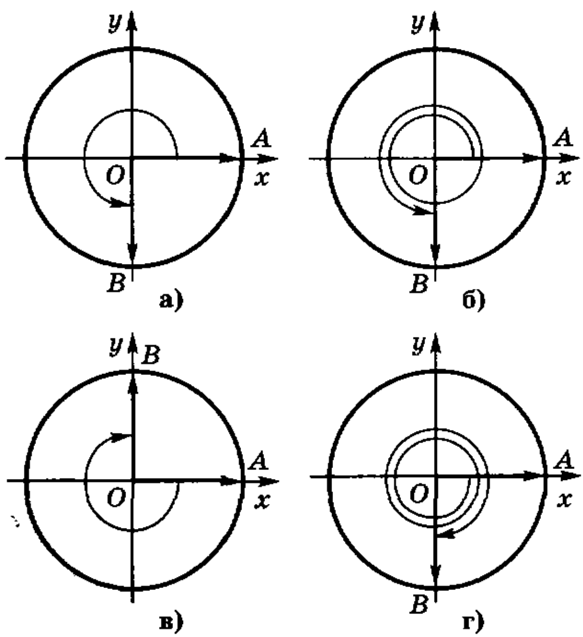


Рис. 63

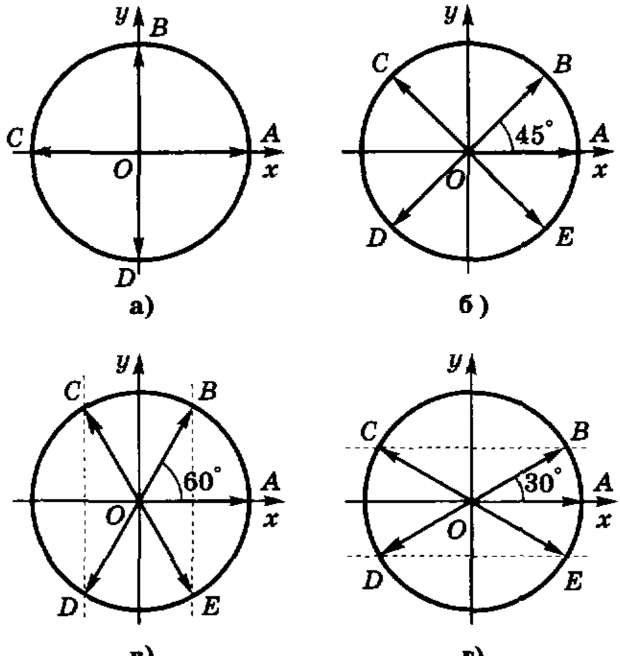


Рис. 64

774. Укажите наименьший по абсолютной величине угол среди данных углов:

а) $30° + 360° \cdot n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $-120° + 360° \cdot n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$;
в) $270° + 360° \cdot n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$; г) $-270° + 360° \cdot n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$;
д) $400° + 360° \cdot n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$; е) $-700° + 360° \cdot n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

775. Представьте следующие углы в виде $a + 360° \cdot n$, где $0 \leqslant a < 360°$, n — некоторое целое число:

а) $400°$; б) $-500°$; в) $600°$; г) $-900°$.

776. Запишите градусные меры всех углов AOB, AOC, AOD, AOE, изображенных на рисунке 64. Например, все углы AOB равны $90° + 360° \cdot n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 64, *а*).

8.2. Радианная мера угла

Пусть подвижный вектор совершил такой поворот против часовой стрелки, что его конец, двигаясь по окружности, прошел расстояние, равное радиусу R этой окружности. Тогда говорят, что образован ***угол, радианная мера которого равна одному радиану***, или, короче, угол в один радиан (пишут: 1 рад).

Можно также сказать, что радиан — это величина центрального угла окружности радиуса R, опирающегося на дугу длиной R. Из геометрии известно, что это определение не зависит от R. Поэтому обычно выбирают $R = 1$.

Поскольку длина окружности радиуса 1 равна 2π, то, совершив один полный оборот против часовой стрелки, получим угол в 2π рад. Следовательно, угол в 2π рад и угол в $360°$ — это один и тот же угол. Но тогда угол в $1°$ и угол в $\frac{2\pi}{360}$ рад $= \frac{\pi}{180}$ рад также один и тот же угол.

Поэтому пишут: $360° = 2\pi$ рад,

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ рад},$$

$$-360° = -2\pi \text{ рад},$$

$$1 \text{ рад} = \frac{180°}{\pi} \approx 57°17'45'' \approx 57{,}296°.$$

$$-5 \text{ рад} = -\frac{5}{\pi} \cdot 180° \approx -286°,$$

$$\alpha \text{ рад} = \left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^{\circ}.$$

Слово «радиан» в таких записях обычно опускают, но подразумевают его. Например, пишут: $180° = \pi$, $-60° = -\frac{\pi}{3}$, $1 = \frac{180°}{\pi}$, $1° = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017453...$.

Поскольку

$$-\frac{7\pi}{2} = -\frac{3}{2}\pi - 2\pi,$$

то, совершив поворот в три четверти полного оборота по часовой стрелке, затем полный оборот по часовой стрелке, получим угол в $-\frac{7\pi}{2}$ (рис. 65, *а*).

Поскольку

$$\frac{17\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi,$$

то, совершив поворот в восьмую часть полного оборота против часовой стрелки, а затем два полных оборота против часовой стрелки, получим угол в $\frac{17\pi}{4}$ (рис. 65, *б*).

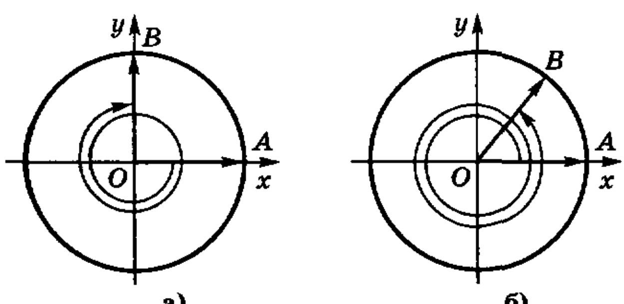


Рис. 65

Для любого действительного числа α существует, и притом только один, угол, радианная мера которого равна α радиан.

Условимся далее вместо слов «угол, радианная мера которого равна α радиан», говорить коротко «угол α».

Отметим, что любое действительное число α можно записать в виде

$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi k,$$

где число α_0 удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant \alpha_0 < 2\pi,$$

а k — некоторое целое число.

Поэтому при $k \neq 0$ угол α можно получить как результат двух поворотов: 1) в положительном направлении на угол α_0 и 2) на $|k|$ полных поворотов (в положительном направлении при $k > 0$ и в отрицательном направлении при $k < 0$).

Пример 1. Так как

$$\frac{19\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi,$$

то угол в $\frac{19\pi}{4}$ можно получить как результат двух поворотов: 1) в положительном направлении на угол $\frac{3\pi}{4}$ и 2) в положительном направлении на 2 полных оборота.

Пример 2. Так как

$$-\frac{11}{2}\pi = \frac{\pi}{2} - 3 \cdot 2\pi,$$

то угол в $-\frac{11}{2}\pi$ можно получить как результат двух поворотов: 1) в положительном иаправлении иа угол $\frac{\pi}{2}$ и 2) в отрицательном направлении на 3 полных оборота.

777°. а) Что такое угол в 1 радиан?

б) Сколько радиан содержит полный оборот; половина полного оборота; четверть полного оборота?

778. Выразите в радианах величину угла, градусная мера которого равна:

а) 360°; 180°; 90°; 270°; 0°; б) 45°; 135°; 225°; 315°;
в) 60°; 120°; 240°; 300°; г) 30°; 150°; 210°; 330°;
д) −45°; −90°; −135°; −180°; е) −270°; −360°; −1800°.

779. Выразите в градусах величину угла, радианная мера которого равна:

а) 2π; π; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; 0; б) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$;

в) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$;

д) $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{12}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{6}$; е) $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{5}$; $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$.

780. Считая, что $\pi \approx 3{,}14159$, определите с недостатком с точностью до 0,01 радианную меру:

а) полного оборота; б) половины полного оборота;
в) четверти полного оборота.

781. Известно, что 1 рад $\approx 57°$. Изобразите на глаз угол в 1; 2; 3; 4; 5; 6 радиан. Проверьте свой глазомер, измерив построенные углы с помощью транспортира.

782. Какой угол больше:

а) в 3 радиана или в π радиан;
б) в 6 радиан или в 2π радиан?

783. Сколько полных оборотов и в каком направлении содержит угол, радианная мера которого равна:

а) 4π; -6π; 12π; -7π;
б) $-0{,}5\pi$; $3\frac{1}{3}\pi$; $-13{,}2\pi$; $21{,}7\pi$?

784. Назовите несколько положительных и отрицательных углов, образованных такими поворотами, при каждом из которых угол между начальным и конечным положениями подвижного вектора равен:

а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $-\frac{\pi}{4}$; г) $-\frac{\pi}{2}$.

785. Запишите в виде $\alpha + 2\pi \cdot n$, где n — некоторое целое число ($0 \leqslant \alpha < 2\pi$), следующие числа:

а) $6{,}5\pi$; б) $\frac{9}{2}\pi$; в) $-12\frac{1}{3}\pi$; г) $-17\frac{1}{6}\pi$.

786. По рисунку 64 определите:

а) наименьшую положительную; наименьшую по абсолютной величине радианную меру углов AOB, AOC, AOD, AOE;
б) радианную меру всех углов AOB, AOC, AOD, AOE.

787. а) Постройте окружность радиуса 5 см с центром в начале системы координат. Точку ее пересечения с положительной полуосью Ox обозначьте A_0. Считая $\overline{OA_0}$ начальным положением подвижного вектора, постройте (с помощью транспортира) вектор $\overline{OA_\alpha}$, где α — градусная мера угла поворота подвижного вектора. Выполните задание при α, равном 0°; 30°; 45°; 60°; 90°.

б) Постройте точки, симметричные точкам A_α относительно оси Ox; оси Oy; начала системы координат. Определите угол поворота, при котором точка A_α переходит в построенную точку.

8.3. Определение синуса и косинуса угла

Далее рассматривается прямоугольная система координат xOy, у которой положительная полуось Ox направлена вправо, а положительная полуось Oy направлена вверх. Напомним, что единичным вектором координатной оси Ox называется вектор, имеющий длину 1, начало в точке O и направленный вдоль положительной полуоси Ox.

Единичной окружностью в тригонометрии называют окружность радиуса 1 с центром в начале снстемы координат xOy прн условии, что единичный вектор $\overline{OA}$ оси Ox прннят за начальное положение подвнжного вектора н что направление поворота протнв часовой стрелки принято за положительное.

Пусть подвижный вектор, совершнв поворот от вектора $\overline{OA}$ до вектора $\overline{OB}$, образует угол AOB, раднанная мера которого равна α радиаи. Точку B едииичной окружности назовем точкой, соответствующей углу α, нли точкой α (рнс. 66); отметнм, что точка B соответствует также любому углу $\alpha + 2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Число, равное ординате точки единичной окружности, соответствующей углу α иазывают *синусом угла* α и обозначают $\sin\alpha$, т. е.

$$\sin\alpha = y.$$

Число, равное абсциссе точки единичной окружности, соответствующей углу α, называют *косинусом угла* α и обозначают $\cos\alpha$, т. е.

$$\cos\alpha = x.$$

Замечанне. Для углов, радианная мера которых заключена между 0 н π, прнведенные определення синуса н косинуса угла совпадают с определениямн, известнымн нз курса геометрин.

Из сказанного следует, что для любого угла α:

а) существует синус этого угла, н прнтом едннственный;

б) существует косинус этого угла, н притом единственный.

Пример 1. Вычислнм: $\sin 0$ и $\cos 0$, $\sin\frac{3\pi}{2}$ и $\cos\frac{3\pi}{2}$.

Углу поворота 0 радиан соответствует точка $A(1;\ 0)$ (рис. 67), следовательно, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$. Углу $\frac{3\pi}{2}$ соответствует точка $B(0;\ -1)$ (рис. 67), следовательно, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$.

Пример 2. Вычислнм: $\sin\frac{5\pi}{4}$ и $\cos\frac{5\pi}{4}$.

Так как $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$, то, опустив нз точки B, соответствующей углу $\frac{5\pi}{4}$, перпенднкуляр BC на ось Ox (рис. 66), получим, что в прямо-

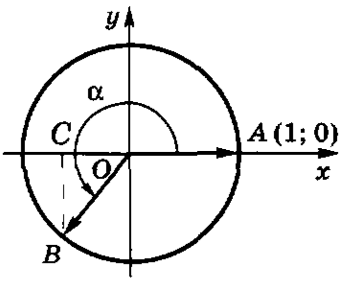


Рис. 66

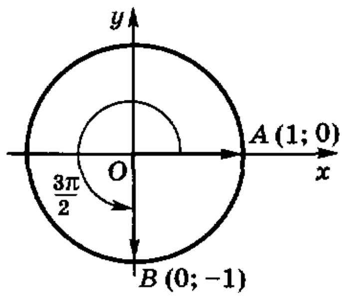


Рис. 67

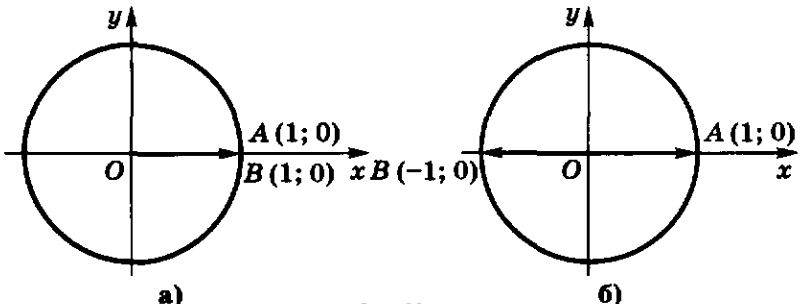


Рис. 68

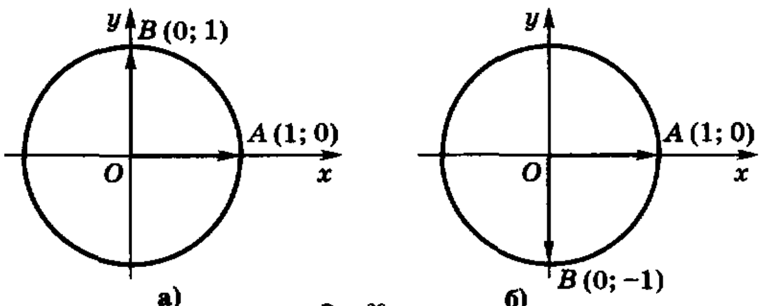


Рис. 69

угольном треугольнике BCO угол COB равен $\frac{\pi}{4} = 45°$, но тогда треугольник BCO равнобедренный, т. е. $BC = OC$. Так как $OB = 1$, то, используя теорему Пифагора, получим, что $BC = OC = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Так как точка $B(x;\ y)$ находится в третьей четверти, то обе ее координаты отрицательны, следовательно, $x = -OC$, $y = -BC$, т. е. точка B имеет координаты $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Так как точка B соответствует углу $\frac{5\pi}{4}$, то

$\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пример 3. Найдем все углы α, для каждого из которых $\sin\alpha = 0$.

Из определения синуса угла следует (рис. 68), что $\sin 0 = 0$, $\sin\pi = 0$, $\sin(-\pi) = 0$, $\sin 2\pi = 0$, $\sin(-2\pi) = 0$, $\sin 3\pi = 0$, $\sin(-3\pi) = 0$, ..., т. е.

$$\sin k\pi = 0$$

для любого целого числа k.

Таким образом, $\sin\alpha = 0$ для углов $\alpha = k\pi$, где k — любое целое число. Для любых углов α, отличных от $k\pi$, $\sin\alpha \neq 0$.

Пример 4. Найдем все углы α, для каждого из которых $\cos\alpha = 0$.

Из определения косинуса угла следует (рис. 69), что $\cos\frac{\pi}{2} = 0$,

$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = 0$, ..., т. е.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$$

для любого целого числа k.

Таким образом, $\cos\alpha = 0$ для углов $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, где k — любое целое число. Для любых углов α, отличных от $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $\cos\alpha \neq 0$.

Из геометрии уже известны синусы и косинусы углов: $0 = 0°$, $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$. Ниже приводится таблица синусов и косинусов этих углов.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Для других углов, радианная мера которых заключена между 0 и $\frac{\pi}{2}$, их синусы и косинусы можно находить с помощью специальных тригонометрических таблиц или электронных калькуляторов.

В следующем пункте будут получены формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. С их помощью вычисление косинусов и синусов любых углов можно свести к вычислению косинуса или синуса некоторого угла, радианная мера которого заключена между 0 и $\frac{\pi}{2}$.

788°. а) Что в тригонометрии называют единичной окружностью?
б) Какую точку единичной окружности называют точкой, соответствующей углу α?
в) Что называют синусом угла α; косинусом угла α?
г) Для какого угла α существует $\sin\alpha$; $\cos\alpha$?
д) Для данного угла α единствен или нет $\sin\alpha$; $\cos\alpha$?

789. а) Постройте единичную окружность.
б) Какой вектор принимается за начальное положение подвижного вектора?
в) Какое направление поворота принято за положительное?

790. Для каких углов α: а) $\sin\alpha = 0$; б) $\cos\alpha = 0$?

791. Найдите:

а) $\sin 0°$; б) $\cos 0$; в) $\sin 90°$; г) $\cos\frac{\pi}{2}$;
д) $\sin 180°$; е) $\cos\pi$; ж) $\sin 270°$; з) $\cos 270°$;
и) $\sin 2\pi$; к) $\cos 360°$; л) $\cos 0°$.

792. Используя свойства прямоугольных треугольников, найдите:

а) $\sin 45°$; б) $\cos \frac{\pi}{4}$; в) $\sin \frac{\pi}{4}$;

г) $\cos 30°$; д) $\sin 60°$; е) $\cos \frac{\pi}{3}$.

Построив угол, вычислите **(793—795)**:

793. а) $\sin 120°$; б) $\cos \frac{2\pi}{3}$; в) $\sin 135°$; г) $\cos \frac{3\pi}{4}$;
д) $\sin \frac{5\pi}{6}$; е) $\cos 150°$; ж) $\sin \pi$; з) $\cos 180°$.

794. а) $\sin 225°$; б) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$; в) $\sin(-\pi)$;

г) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; д) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; е) $\cos \frac{3\pi}{2}$.

795. а) $\sin \frac{11\pi}{2}$; б) $\cos\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$; в) $\sin \frac{7\pi}{3}$; г) $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$.

796. На миллиметровой бумаге постройте систему координат с единичным отрезком 10 см. Постройте окружность с центром в начале координат, проходящую через точку $(1; 0)$. Найдите приближенно (с точностью до сотых):
а) $\sin 30°$; б) $\cos 60°$; в) $\sin 150°$;
г) $\cos 150°$; д) $\sin 190°$; е) $\cos 250°$;
ж) $\sin 250°$; з) $\cos 300°$; и) $\sin 300°$.

797. а) На единичной окружности постройте точки A_α, соответствующие углам α, равным $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

б) Постройте точки, симметричные точкам A_α относительно оси Ox; оси Oy; начала системы координат.

в) Определите радианную меру углов, которым соответствуют построенные точки.

Найдите синусы и косинусы следующих углов (k — любое целое число) **(798—799)**:

798. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; б) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; в) $\pi + 2\pi k$;

г) $-\pi + 2\pi k$; д) $2\pi k$; е) $4\pi k$.

799. а) πk; б) $-\pi k$; в) $\frac{\pi}{2}$;

г) $-\frac{\pi}{2}$; д) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; е) $-\frac{\pi}{2} + \pi k$.

800. Верно ли равенство:

а) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2}$; б) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$?

801. а) Отметьте на единичной окружности примерное положение точек, соответствующих углам, радианная мера которых равна 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б) Определите с точностью до 0,1 значения синусов и косинусов этих углов.

в)* Если отмечать на единичной окружности точки, соответствующие углам, радианная мера которых равна 1, 2, 3, 4, ..., могут ли какие-нибудь из этих точек совпасть?

802. Определите знак числа:

а) $\sin 4$; б) $\cos\frac{3\pi}{4}$; в) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; г) $\cos(-4)$.

803. Выполняется ли равенство $\cos\alpha=\sin\alpha$ при каком-нибудь α? Проиллюстрируйте свое решение на рисунке.

804. Отметьте на единичной окружности точки, соответствующие углам α, для которых:

а) $\cos\alpha > 0$; б) $\cos\alpha < 0$; в) $\sin\alpha \leqslant 0$; г) $\sin\alpha \geqslant 0$.

Что больше **(805—806)**:

805. а) $\sin 40°$ или $\sin\frac{\pi}{4}$; б) $\cos\frac{\pi}{3}$ или $\cos 60°$;

в) $\sin 120°$ или $\sin 130°$; г) $\cos\frac{3\pi}{4}$ или $\cos\pi$;

д) $\sin 300°$ или $\sin 130°$; е) $\cos\frac{3\pi}{4}$ или $\cos\frac{\pi}{2}$;

ж) $\sin(-400°)$ или $\cos 120°$; з) $\cos\frac{13\pi}{4}$ или $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$?

806. а) $\sin 3$ или $\sin\pi$; б) $\cos 4$ или $\cos 5$;

в) $\sin 1$ или $\cos(-1)$; г) $\sin(-2)$ или $\cos 2$?

807. Определите знак произведения:

а) $\cos 130°\cdot\sin 170°$; б) $\sin\frac{3\pi}{4}\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$;

в) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; г) $\cos\frac{11}{4}\pi\cdot\sin\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$.

Упростите числовое выражение **(808—809)**:

808. а) $3\cos 0+2\sin\frac{\pi}{2}-4\cos\frac{\pi}{2}-7\sin(-\pi)$;

б) $\cos\frac{\pi}{2}-3\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+4\cos(-2\pi)-2\sin(-3\pi)$.

809. а) $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)-2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2\cos\frac{5\pi}{6}$;

б) $3\cos\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{2\pi}{3}+7\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

810*. Докажите что если точка A_α единичной окружности соответствует некоторому рациональному числу, то она не соответствует никакому другому рациональному числу.

8.4. Основные формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$

Т е о р е м а 1. *Для любого угла α справедливо равенство*

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \qquad (1)$$

Это равенство называют **основным тригонометрическим тождеством.**

Доказательство. Как известно, окружность радиуса 1 с центром в начале координат имеет уравнение

$$x^2 + y^2 = 1. \qquad (2)$$

Как следует из определения синуса и косинуса угла α, точка $B\ (x;\ y)$, принадлежащая этой окружности и соответствующая углу α, имеет координаты

$$x = \cos\alpha, \qquad y = \sin\alpha, \qquad (3)$$

которые удовлетворяют уравнению (2). Подставляя их значения в уравнение (2), получим равенство (1).

Теорема 1 доказана.

Пример. Вычислим $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и α принадлежит интервалу $\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Из основного тригонометрического тождества следует, что $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$. Для любого угла α из указанного интервала $\sin\alpha < 0$, следовательно, $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$.

Следствие. *Для любого угла* α *справедливы неравенства*

$$|\sin\alpha| \leqslant 1, \qquad |\cos\alpha| \leqslant 1. \qquad (4)$$

Действительно, так как $\cos^2\alpha \geqslant 0$ для любого угла α, то

$$\sin^2\alpha \leqslant \sin^2\alpha + \cos^2\alpha,$$

откуда, применяя основное тригонометрическое тождество, получим, что $\sin^2\alpha \leqslant 1$ или $|\sin\alpha| \leqslant 1$.

Аналогично доказывается справедливость неравенства $|\cos\alpha| \leqslant 1$.

Заметим, что неравенства (4) можно записать так:

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Теорема 2. *Для любого угла* α *справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos\alpha, \\ \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha. \end{aligned} \qquad (5)$$

Доказательство. Точка B, соответствующая углу α, и точка B_1, соответствующая углу $(-\alpha)$, симметричны (рис. 70) относительно оси Ox. Поэтому абсциссы этих точек равны, а ординаты равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, т. е. ординаты — противоположные числа. Следовательно, справедливы равенства (5).

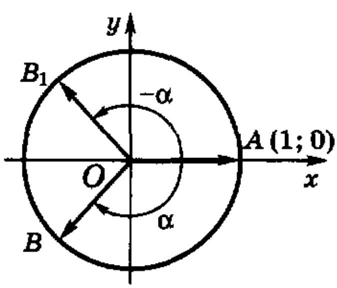


Рис. 70

Теорема 2 доказана.

Примеры.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}, \ \cos(-30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin(-45°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Теорема 3. *Для любого угла α и любого целого числа k справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+2k\pi) &= \sin\alpha, \\ \cos(\alpha+2k\pi) &= \cos\alpha. \end{aligned} \qquad (6)$$

Доказательство. Углам α и $\alpha+2k\pi$ соответствует одна и та же точка B (рис. 71) единичной окружности. Поэтому справедливы равенства (6).

Теорема 3 доказана.

Примеры.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1, \ \cos\left(\frac{\pi}{2}-10\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\cos 300° = \cos(360° - 60°) = \cos(-60°) = \cos 60° = \frac{1}{2},$$

$$\sin 660° = \sin(720° - 60°) = \sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Равенства (1), (5) и (6) называют **основными формулами** для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

В дальнейшем нам понадобятся еще следующие формулы:

$$\begin{aligned} \sin(\pi+\alpha) &= -\sin\alpha, \\ \cos(\pi+\alpha) &= -\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (7)$$

Покажем, что эти равенства справедливы для любого угла α. Действительно, точка B, соответствующая углу α, и точка B_1, соответствующая углу $(\alpha+\pi)$, симметричны относительно начала координат. Поэтому абсциссы и ординаты этих точек — противоположные числа. Следовательно, справедливы равенства (7) (рис. 72).

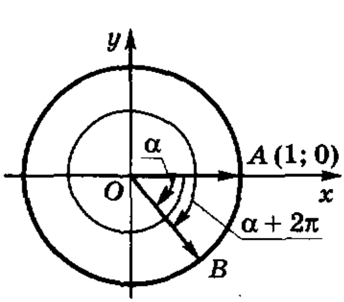


Рис. 71

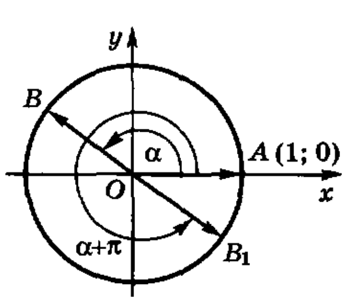


Рис. 72

Примеры.

$$\sin\frac{5\pi}{4}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 225^\circ=\cos(180^\circ+45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin 240^\circ=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{4\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}.$$

---

811. Запишите основное тригонометрическое тождество.

812. Каким числом ограничен: а) $|\sin\alpha|$; б) $|\cos\alpha|$ для любого угла α?

813. а) Каковы основные формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$?
б) Какие знаки имеют синус и косинус угла α, если точка единичной окружности, соответствующая углу α, расположена в I четверти; во II четверти; в III четверти; в IV четверти?

814. Существует ли такой угол α, для которого:
а) $\sin\alpha=-1$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$; б) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
в) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$; г) $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$, $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$?

815. Возможно ли равенство:
а) $\sin\alpha=-\sqrt{3}$; б) $\cos\alpha=\sqrt{3}-1$; в) $\sin\alpha=\frac{\pi}{2}$;
г) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{11}}{3}$; д) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$; е) $\cos\alpha=-\frac{\pi}{3}$?

816. Вычислите $\sin\alpha$, если:
а) $\cos\alpha=-\frac{1}{4}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; б) $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

817. Вычислите $\cos\alpha$, если:
а) $\sin\alpha=0{,}8$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; б) $\sin\alpha=-0{,}6$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

Упростите выражение (**818—821**):

818. а) $1-\sin^2\alpha$; б) $1-\cos^2\alpha$;
в) $\sin^2\alpha-1$; г) $\cos^2\alpha-1$.

819. а) $(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)$; б) $(\cos\alpha-1)(1+\cos\alpha)$;
в) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+1$; г) $1+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$.

820. а) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$; б) $\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha-1}$; в) $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$; г) $\frac{\cos^2\alpha-1}{\sin^2\alpha}$,
где угол α такой, что знаменатель дроби не обращается в нуль.

821. а) $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$; б) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$;
в) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;
г) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$.

822°. Может ли синус или косинус угла принимать значения, по абсолютной величине большие единицы?

823. Если $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha = 1 + b$, то какие значения может принимать b? Определите $\cos\alpha$.

824. Может ли косинус угла быть равным:

а) $-\frac{21}{37}$; б) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$; в) $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}$; г) $\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{6}}$?

825. Вычислите:

а) $6\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 5\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$;

б) $3\sin\left(-\frac{3\pi}{6}\right) - 4\cos\left(-\frac{11\pi}{2}\right) + 5\sin(7\pi) + \cos(-11\pi)$.

826. Определите знак произведения:
а) $\sin 157° \sin 275° \sin(-401°) \sin 910° \sin 328°$;
б) $\cos 73° \cos 140° \cos 236° \cos 301° \cos(-384°) \cos 1000°$.

827. Найдите все углы α из интервала $(0; 2\pi)$, для каждого из которых справедливо равенство:
а) $|\sin\alpha| = \sin\alpha$; б) $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$.

828. Расположите в порядке возрастания числа:
а) $\sin(-55°)$, $\sin 600°$, $\sin 1295°$;
б) $\cos 653°$, $\cos(-68°)$, $\cos 295°$.

Сравните (**829—831**):

829. а) $\sin 91°$ и $\sin 92°$; б) $\sin 195°$ и $\sin 200°$;
в) $\sin 354°$ и $\sin 959°$; г) $\sin 734°$ и $\sin(-1066°)$.

830. а) $\cos 101°$ и $\cos 157°$; б) $\cos 190°$ и $\cos 200°$;
в) $\cos 1000°$ и $\cos 2000°$; г) $\cos 860°$ и $\cos 510°$.

831. а) $\cos 1{,}6\pi$ и $\cos 1{,}68\pi$; б) $\sin 4{,}5$ и 0;
в) $\cos 5{,}1\pi$ и $\cos 5\pi$; г) $\sin 1$ и $\cos 1$.

832. Докажите справедливость равенства:
а) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$; б) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$;
в) $\sin(3\pi - \alpha) = \sin\alpha$; г) $\cos(5\pi - \alpha) = \cos\alpha$.

833. Упростите выражение:
а) $\sin(-\alpha + \pi)$; б) $\cos(\pi - \alpha)$;
в) $\sin(\alpha + 7\pi)$; г) $\cos(\alpha - 9\pi)$.

834. Вычислите:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 3\pi\right)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 8\pi\right)$; в) $\sin\left(9\frac{5}{6}\pi\right)$.

835. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin(\pi + \alpha)\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\alpha - \pi)\cos(\alpha + \pi)}$; б) $\frac{\cos(\pi - \alpha)\cos(\pi + \alpha)}{\sin(\alpha - \pi)\sin(\pi + \alpha)}$;
в) $\sin(\alpha - \pi)\sin(\alpha + \pi) - \cos(\pi + \alpha)\cos(\alpha - \pi)$;
г) $\sin(2\pi + \alpha)\sin(3\pi - \alpha) - \cos(3\pi + \alpha)\cos(\alpha - 2\pi)$,
где в заданиях «а» и «б» угол α такой, что знаменатель дроби не обращается в нуль.

836. Для любого ли угла α справедливо равенство:
а) $\cos\alpha = \cos|\alpha|$; б) $\sin\alpha = \sin|\alpha|$?

Число, равное отношению $\sin\alpha$ к $\cos\alpha$, называют тангенсом угла α и обозначают $\operatorname{tg}\alpha$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (1)$$

Тангенс угла α определен для всех углов α, за исключением тех, для которых $\cos\alpha$ равен нулю. Поэтому в определении $\operatorname{tg}\alpha$ должны быть *исключены* все углы

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad (2)$$

где k — любое целое число.

Из определения следует, что для любого угла α, ие совпадающего ни с одним из углов (2), тангенс этого угла существует, и притом единственный.

Число, равное отношению $\cos\alpha$ к $\sin\alpha$, называют котангенсом угла α и обозначают $\operatorname{ctg}\alpha$, т. е.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (3)$$

Котангенс угла α определеи для всех углов α, за исключеиием тех, для которых $\sin\alpha$ равен нулю. Поэтому в определеиии $\operatorname{ctg}\alpha$ должны быть *исключены* все углы

$$\alpha = k\pi, \qquad (4)$$

где k — любое целое число.

Из определения следует, что для любого угла α, ие совпадающего ни с одним нз углов (4), котангенс этого угла существует, и притом единствениый.

Из равенств (1) и (3) следует справедливость равеиства

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \qquad (5)$$

для всех углов α, для которых существует одновремеиио и $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

Левая часть равенства (5) существует для всех углов, за исключением тех, для которых нли $\sin\alpha = 0$, нли $\cos\alpha = 0$, поэтому формула (5) справедлива для всех углов, кроме углов

$$\alpha = \frac{\pi}{2}k,$$

где k — любое целое число.

Из определения тангенса и котангенса угла следует, например, что

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg}45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1, \quad \operatorname{tg}60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \sqrt{3}.$$

Тангенс угла $\frac{\pi}{2}$ не существует, потому что $\cos\frac{\pi}{2}=0$, но существует котангенс угла $\frac{\pi}{2}$.

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{1}=0.$$

Для угла в 0 радиан, наоборот, не существует котангенс, потому что $\sin 0=0$, но существует тангенс:

$$\operatorname{tg}0=\frac{\sin 0}{\cos 0}=\frac{0}{1}=0.$$

Основными формулами для $\operatorname{tg}\alpha$ являются следующие:

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha, \qquad (6)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\pi n)=\operatorname{tg}\alpha, \qquad (7)$$

где n — любое целое число.

Конечно, эти равенства верны только для таких углов α, для которых одновременно имеют смысл правые и левые части.

Для любого угла α, для которого существует $\operatorname{tg}\alpha$, т. е. для угла, отличного от угла $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$, где k — любое целое число, имеет смысл и $\operatorname{tg}(-\alpha)$, и $\operatorname{tg}(\alpha+\pi n)$. Покажем справедливость равенств (6) и (7) для любого такого угла α. Используя формулы для $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, имеем

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Если n — четное число, т. е. $n=2l$, где l — целое число, то

$$\operatorname{tg}(\alpha+n\pi)=\operatorname{tg}(\alpha+2l\pi)=\frac{\sin(\alpha+2l\pi)}{\cos(\alpha+2l\pi)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Если n — нечетное число, т. е. $n=2l+1$, где l — целое число, то

$$\operatorname{tg}(\alpha+n\pi)=\operatorname{tg}(\alpha+\pi+2l\pi)=\frac{\sin(\alpha+\pi+2l\pi)}{\cos(\alpha+\pi+2l\pi)}=$$

$$=\frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Таким образом, равенство (7) доказано для любого целого числа n.

Примеры.

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-1, \qquad \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}+\pi\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg}\frac{10\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}.$$

Основнымн формуламн для $\operatorname{ctg}\alpha$ являются следующие:

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \tag{8}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha, \tag{9}$$

где n — любое целое число.

Конечно, эти равенства верны только для таких углов α, для которых одновременно имеют смысл правые и левые их части.

Для любого угла α, для которого существует $\operatorname{ctg}\alpha$, т. е. для углов, отличных от угла $\alpha = k\pi$, где k — любое целое число, имеет смысл и $\operatorname{ctg}(-\alpha)$, и $\operatorname{ctg}(\alpha+\pi n)$. Доказательство справедливости равенств (8) и (9) для любого такого угла α аналогично доказательству равенств (6) и (7).

Примеры.

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1, \quad \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4} + \pi\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1.$$

837°. Что называют таигеисом угла α; котангенсом угла α?

838°. Для какого угла α не существует $\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha$?

839°. Для каких углов α справедливо равеиство

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1?$$

840°. а) Если для угла α существует $\operatorname{tg}\alpha$, то единственный ли он?

б) Если для угла α существует $\operatorname{ctg}\alpha$, то едииственный ли он?

841. Каковы основные формулы для $\operatorname{tg}\alpha$; для $\operatorname{ctg}\alpha$? Для каких углов α оии справедливы?

Найдите (**842—843**):

842. а) $\operatorname{tg} 0°$; б) $\operatorname{tg}\pi$; в) $\operatorname{tg} 3\pi$; г) $\operatorname{tg} 1440°$;

д) $\operatorname{tg} 30°$; е) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; ж) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; з) $\operatorname{tg} 90°$.

843. а) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$; б) $\operatorname{ctg} 270°$; в) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$; г) $\operatorname{ctg} 90°$;

д) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$; е) $\operatorname{ctg} 45°$; ж) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$; з) $\operatorname{ctg} 0$.

844. Какие знаки имеют тангенс и котангенс угла α, если точка единичной окружности, соответствующая углу α, расположена в I четверти; во II четверти; в III четверти; в IV четверти?

845. Определите знак выражения:

а) $\operatorname{tg} 71° \operatorname{tg} 139° \operatorname{tg} 235° \operatorname{tg} 304° \operatorname{tg}(-393°) \operatorname{tg} 1000°$;

б) $\operatorname{ctg} 282° \operatorname{ctg}(-401°) \operatorname{ctg}(-910°) \operatorname{ctg} 140° \operatorname{ctg} 240°$;

в) $\cos 1 \sin 3 \operatorname{tg} 4 \operatorname{ctg} 5 \operatorname{tg} 2 \operatorname{tg} 6$;

г) $\operatorname{tg} 1{,}5 \operatorname{ctg} 4{,}5 \operatorname{tg}(-3{,}1) \operatorname{ctg}(-3{,}1)$;

д) $\dfrac{\sin 6 + \cos(-4)}{\operatorname{tg}(-2)\cdot\operatorname{ctg}(-4)}$; е) $\dfrac{\sin(-8) + \cos 9}{\cos 11 \cdot \operatorname{tg}(-9)}$.

846. Для всех α, при каждом из которых правая и левая части равенства имеют смысл, докажите справедливость равенства:

а) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; б) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

847. Вычислите:

а) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\cos\alpha = \frac{3}{5}$;

б) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\sin\alpha = \frac{1}{2}$;

в) $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ и $\cos\alpha = -0{,}6$;

г) $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ и $\sin\alpha = -0{,}8$;

д) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$;

е) $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\operatorname{ctg}\alpha = -1$;

ж) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$;

з) $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 1$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Упростите выражение **(848—850)**:

848[1]. а) $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; б) $\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$;

в) $\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; г) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$;

д) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$; е) $1 - \frac{1}{\sin^2\alpha}$;

ж) $\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$; з) $\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}$.

849. а) $\sin\beta\operatorname{ctg}\beta$; б) $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{ctg}\alpha$;

в) $\sin\beta : \operatorname{tg}\beta$; г) $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$;

д) $\cos^2\alpha(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)$; е) $1 - \sin^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha$;

ж) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; з) $\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

850. а) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}$;

в) $\sin^2\beta + \operatorname{tg}^2\beta - \frac{1}{\cos^2\beta}$; г) $\frac{1}{\sin^2\alpha} - \operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha$;

д) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; е) $\frac{\cos\beta}{1-\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{1+\sin\beta}$.

---

[1] В заданиях 848— 854 углы α и β таковы, что данные числовые выражения имеют смысл.

851. Докажите справедливость равенства:

а) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$ при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — некоторое целое число;

б) $\frac{\cos\beta + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\beta} = 1 + \sin\beta$ при $\beta \neq \pi k$, где k — некоторое целое число.

Упростите выражение (**852—854**):

852. а) $\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\pi) - \operatorname{tg}(\beta+2\pi)}{\operatorname{ctg}(-\beta) - \operatorname{ctg}(-\alpha)}$; б) $\frac{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha) + \operatorname{tg}(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\alpha+3\pi) - \operatorname{tg}(\alpha+2\pi)}$.

853. а) $\frac{\sin(2\pi-\alpha)\sin(\alpha-\pi)\cos(\alpha-2\pi)}{\cos(2\pi-\alpha)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\operatorname{tg}(3\pi-\alpha)}$;

б) $\frac{\sin(\pi+\alpha)\sin(\alpha-\pi)\cos(2\pi-\alpha)\operatorname{tg}(3\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)\cos(\alpha-5\pi)\cos(2\pi+\alpha)\operatorname{tg}(-\alpha-\pi)}$.

854. а) $\frac{1-\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha + 1}$; б) $\frac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}$.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

1. Косинус разности и косинус суммы двух углов

Теорема 1. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

Это равенство называют *формулой косинуса разности двух углов.*

Эту теорему можно сформулировать так: косинус разности двух углов равен произведению косинуса первого угла на косинус второго угла плюс произведение синуса первого угла на синус второго угла.

Доказательство. Пусть даны два угла α и β. Пусть точка B на единичной окружности соответствует углу α, а точка C — углу β (рис. 73). Тогда, используя определение синуса и косинуса угла, получаем, что точка B имеет координаты $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, а точка

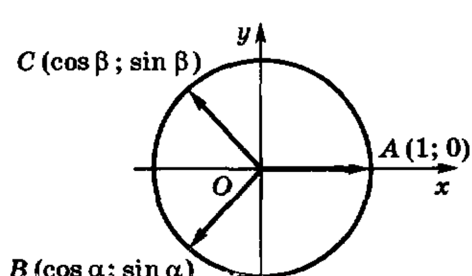


Рис. 73

C — координаты $x = \cos\beta$, $y = \sin\beta$. Вектор $\overline{a} = \overline{OB}$ имеет координаты $(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, а вектор $\overline{b} = \overline{OC}$ имеет координаты $(\cos\beta;\ \sin\beta)$.

Вычислим скалярное произведение этих векторов:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Но, как известно из геометрии, скалярное произведение двух векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними. Обозначим через γ угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Учитывая, что $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 1$, получаем

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \cos\gamma. \qquad (3)$$

Отметим, что в геометрии под углом между векторами понимают неотрицательный угол из промежутка от 0 до π. Поэтому

$$0 \leqslant \gamma \leqslant \pi.$$

Запишем углы α и β в виде

$$\alpha = \alpha_0 + 2k\pi,$$
$$\beta = \beta_0 + 2l\pi,$$

где $0 \leqslant \alpha_0 < 2\pi$, $0 \leqslant \beta_0 < 2\pi$, а k и l — некоторые целые числа.

Тогда можно считать, что точка B соответствует углу α_0, а точка C — углу β_0.

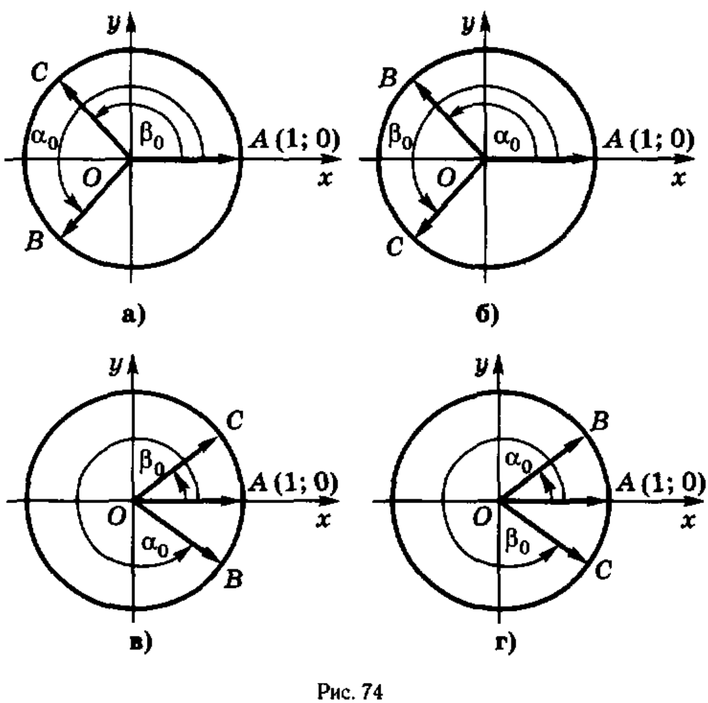


Рис. 74

Легко видеть, что либо $\gamma = \alpha_0 - \beta_0$, либо $\gamma = \beta_0 - \alpha_0$, либо $\gamma = 2\pi - (\alpha_0 - \beta_0)$, либо $\gamma = 2\pi - (\beta_0 - \alpha_0)$ (рис. 74), но в любом из этих случаев $\cos\gamma = \cos(\alpha_0 - \beta_0)$. Так как

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha_0 - \beta_0 + 2(k - l)\pi) = \cos(\alpha_0 - \beta_0),$$

то получим, что

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\gamma. \qquad (4)$$

Теперь из равенств (4), (3) и (2) следует, что

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Теорема 1 доказана.

Пример.

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}.$$

Теорема 2. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Это равенство называют *формулой косинуса суммы двух углов.*

Эту теорему можно сформулировать так: косинус суммы двух углов равен произведению косинуса первого угла на косинус второго угла минус произведение синуса первого угла на синус второго угла.

Доказательство. Используя формулу косинуса разности двух углов и формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, имеем

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) =$$
$$= \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Теорема 2 доказана.

Пример.

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}.$$

855. Запишите формулу:

а) косинуса разности двух углов;

б) косинуса суммы двух углов.

Вычислите, не пользуясь таблицей или калькулятором (**856—858**):

856. а) $\cos 15°$; б) $\cos 75°$; в) $\cos 105°$.

857. а) $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$;

б) $\sin 10°\sin 70° + \cos 70°\cos 10°$.

858. а) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}$;

б) $\sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{7\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{4}$.

859. Упростите выражение:

а) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$.

860. Вычислите $\cos(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

861. Докажите справедливость равенства:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$;

в) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$; г) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$.

862. Вычислите $\cos(\alpha-\beta)$, если $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$ и $\sin\alpha=-\frac{1}{4}$, $\cos\beta=-\frac{1}{4}$.

863. Вычислите $\cos(\alpha+\beta)$, если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ и $\cos\alpha=-0{,}8$, $\sin\beta=0{,}2$.

864. Вычислите:

а) $\dfrac{\cos 2^\circ\cos 28^\circ-\sin 28^\circ\sin 2^\circ}{\cos 47^\circ\cos 2^\circ+\sin 47^\circ\sin 2^\circ}$;

б) $\dfrac{\sin\frac{2\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{7\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}}$.

865. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$; б) $\dfrac{\sin\alpha\sin\beta-\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cos\beta}$,

где углы α и β такие, что знаменатели не обращаются в нуль.

Вычислите **(866—867)**:

866. а) $\cos\frac{3\pi}{4}$; б) $\cos\frac{\pi}{12}$;

в) $\cos\frac{7\pi}{12}$; г) $\cos\frac{11\pi}{12}$.

867. а) $\cos 75^\circ+\cos 15^\circ$; б) $\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}$.

Упростите выражение **(868—869)**:

868. а) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

б) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\alpha$.

869. а) $\cos^2(60° + \beta) + \cos^2(60° - \beta) + \cos^2\beta$;

б) $\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\alpha$.

870. а) Косинус острого угла равен 0,2. Найдите косинус смежного угла.

б) Синус острого угла равен $\frac{1}{3}$. Найдите синус смежного угла.

871. а) Найдите $\cos\alpha\cos\beta$, если $\cos(\alpha+\beta) = 0{,}2$, $\cos(\alpha-\beta) = 0{,}5$.

б) Найдите $\sin\alpha\sin\beta$, если $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{3}$, $\cos(\alpha-\beta) = \frac{4}{5}$.

872. а) Найдите $\cos(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\beta = -\frac{1}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Найдите наименьшее по абсолютной величине значение $(\alpha+\beta)$.

б) Найдите $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = -1$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Найдите наименьшее по абсолютной величине значение $(\alpha-\beta)$.

2. Формулы для дополнительных углов

Два угла α и β, составляющие в сумме $\frac{\pi}{2}$, называют дополнительными углами.

Теорема 1. *Для любого угла α справедливы равенства*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \tag{1}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha. \tag{2}$$

Доказательство. Используя формулу косинуса разности двух углов, имеем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha =$$
$$= 0\cdot\cos\alpha + 1\cdot\sin\alpha = \sin\alpha,$$

и формула (1) тем самым доказана.

Теперь докажем формулу (2), используя уже доказанную формулу (1). Обозначим $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, тогда по формуле (1)

$$\sin\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right). \tag{3}$$

Теперь, подставляя в формулу (3) $\frac{\pi}{2}-\alpha$ вместо β, получим, что

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.$$

Теорема 1 доказана.

Пример.

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}.$$

---

873. Докажите формулу:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$.

Упростите выражение (**874—875**):

874. а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$;

в) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)$;

д) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$; е) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

875. а) $\sin(\pi-\alpha)$; б) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)$; г) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$;

д) $\sin\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{2}\right)$; е) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)$.

876. Приведите числовое выражение к виду синуса или косинуса положительного угла, не превышающего $45°$:

а) $\sin 80°=\sin(90°-10°)=\ldots$; б) $\sin 70°$; в) $\cos 82°$.

877. Приведите числовое выражение к виду синуса или косинуса положительного угла, не превышающего $\frac{\pi}{4}$:

а) $\sin\frac{\pi}{3}$; б) $\cos\frac{\pi}{3}$; в) $\sin\frac{5\pi}{7}$; г) $\cos\frac{11\pi}{13}$.

3. Синус суммы и синус разности двух углов

Теорема 1. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

Это равенство называют *формулой синуса суммы двух углов.* Эту теорему можно сформулировать так: синус суммы двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго плюс произведение косинуса первого угла на синус второго.

Доказательство. Используя формулы для дополнительных углов и формулу косинуса разности двух углов, имеем

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta =$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Теорема 1 доказана.

Пример 1. Вычислим $\sin 75°$ без таблиц и калькулятора:

$$\sin 75° = \sin(45°+30°) = \sin 45°\cos 30° + \cos 45°\sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}.$$

Теорема 2. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \quad (2)$$

Это равенство называют *формулой синуса разности двух углов.*

Эту теорему можно сформулировать так: синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго минус произведение косинуса первого угла на синус второго.

Доказательство. Используя формулу синуса суммы двух углов и формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, имеем

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$$
$$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Теорема 2 доказана.

Пример 2. Вычислим $\sin 15°$ без таблиц и калькулятора:

$$\sin 15° = \sin(45°-30°) = \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

878. Запишите формулу:

а) синуса суммы двух углов;

б) синуса разности двух углов;

в) косинуса суммы двух углов;

г) косинуса разности двух углов.

Докажите справедливость равенства (**879—880**):

879. а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$; б) $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$;

в) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos\alpha$; г) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha$.

880. а) $\sin(45°+\alpha) = \cos(45°-\alpha)$;

°б) $\cos(45°+\alpha) = \sin(45°-\alpha)$.

Вычислите (881—882):

881. а) $\sin 20° \cos 10° + \cos 20° \sin 10°$;

б) $\sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{4\pi}{5}$;

в) $\cos 80° \sin 10° + \sin 80° \cos 10°$;

г) $\cos \frac{3\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8}$.

882. а) $\sin 75°$; б) $\sin 105°$; в) $\sin 165°$; г) $\sin 195°$.

Упростите выражение (883—884):

883. а) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $2 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$.

884*. а) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha)$;

в) $\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha)$; г) $\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha$.

885. Вычислите:

а) $\sin(\alpha + \beta)$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ и $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \beta = \frac{1}{3}$;

б) $\sin(\alpha - \beta)$, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ и $\cos \alpha = -0{,}2$, $\cos \beta = 0{,}1$.

886. Докажите справедливость равенства:

а) $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$;

б) $\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$.

4. Сумма и разность синусов и косинусов

Теорема 1. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Это равенство называют *формулой суммы синусов.*

Эту теорему иначе можно сформулировать так: сумма синусов любых двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности.

Теорема 2. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Это равенство называют *формулой разности синусов.*

Эту теорему еще можно сформулировать так: разность синусов любых двух углов равна удвоенному произведению синуса полуразности этих углов на косинус их полусуммы.

Т е о р е м а 3. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Это равенство называют *формулой суммы косинусов.*

Эту теорему можно сформулировать и так: сумма косинусов любых двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности.

Т е о р е м а 4. *Для любых углов α и β справедливо равенство*

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Это равенство называют *формулой разности косинусов.*

Эту теорему иначе можно сформулнровать так: разиость косинусов любых двух углов равна взятому со знаком «минус» удвоенному произведению синуса полусуммы этнх углов на синус их полуразиости.

Здесь под *разностью углов* понимается такая разность, когда из угла, стоящего на месте уменьшаемого, вычитается угол, стоящий на месте вычитаемого.

Д о к а з а т е л ь с т в о теорем 1, 2, 3, 4. Положим:

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad y = \frac{\alpha-\beta}{2},$$

тогда

$$\alpha = x + y,\ \beta = x - y.$$

Используя формулы косинуса суммы, косинуса разности, синуса суммы и синуса разности, получим

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x+y) + \sin(x-y) =$$
$$= (\sin x\cos y + \cos x\sin y) + (\sin x\cos y - \cos x\sin y) =$$
$$= 2\sin x\cos y = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = \sin(x+y) - \sin(x-y) =$$
$$= 2\cos x\sin y = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = \cos(x+y) + \cos(x-y) =$$
$$= 2\cos x\cos y = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = \cos(x+y) - \cos(x-y) =$$
$$= -2\sin x\sin y = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Теоремы 1, 2, 3 и 4 доказаны.

Пример. Вычислим:

а) $\sin\frac{7\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12} = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

б) $\cos\frac{5\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12} = -2\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

887. Запишите формулу:

а) суммы синусов; б) разности синусов;

в) суммы косннусов; г) разности косинусов.

Представьте в виде произведения **(888—891)**:

888. а) $\sin 20° + \sin 10°$; б) $\sin 60° - \sin 30°$;

в) $\cos 70° + \cos 20°$; г) $\cos 80° - \cos 30°$.

889. а) $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{4}$; б) $\sin \frac{\pi}{14} + \sin \frac{\pi}{3}$;

в) $\sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{4}$; г) $\cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{\pi}{5}$.

890. а) $\sin \alpha + \sin 3\alpha$; б) $\cos 3\alpha - \cos \alpha$;

в) $\sin 3\alpha - \sin 5\alpha$; г) $\cos 7\alpha + \cos \alpha$;

д) $\sin \alpha + \cos \alpha$; е) $\cos \alpha - \sin \alpha$.

891. а) $\cos 40° + \cos 30° + \cos 20° + \cos 10°$;

б) $\sin 5° + \sin 10° + \sin 15° + \sin 20°$.

892. Докажите справедливость равенства:

а) $\sin 50° + \sin 10° - \cos 20° = 0$; б) $\cos 48° + \sin 18° - \cos 12° = 0$.

893. Вычнслнте:

а) $\cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}$; б) $\cos \frac{7\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}$;

в) $\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}$; г) $\sin \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}$.

Докажите справедливость равенства **(894—895)**:

894. а) $\cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{12} = 0$; б) $\sin \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5} = 0$;

в) $\cos \frac{9\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} = 0$; г) $\sin \frac{3\pi}{10} - \sin \frac{7\pi}{10} = 0$.

895. а) $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$;

б) $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$;

в) $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$.

896. Вычислите:

а) $\cos 75° \cdot \cos 105°$ б) $\sin 75° \cdot \sin 15°$;

в) $\cos \frac{75°}{2} \cdot \cos \frac{15°}{2}$; г) $\sin 105° \cdot \cos 15°$.

897[1]. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}$; б) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}$.

[1] В заданиях 897— 900 угол α таков, что знаменатель дроби в нуль не обращается.

898. Докажите справедливость равенства:

а) $\sin 35° + \sin 25° = \cos 5°$; б) $\cos 20° - \sin 50° = \sin 10°$;

в) $\sin 87° - \sin 93° - \sin 59° + \sin 61° = \sin 1°$.

899*. Докажите, что для любого угла α справедливо неравенство $|\sin \alpha + \cos \alpha| \leqslant \sqrt{2}$.

Докажите справедливость равенства **(900—901)**:

900. а) $\dfrac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = \operatorname{ctg} \dfrac{\beta - \alpha}{2}$; б) $\dfrac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

901. а) $(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = 4 \cos^2 \dfrac{\alpha - \beta}{2}$;

б) $(\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2 = 4 \sin^2 \dfrac{\alpha - \beta}{2}$.

902. Представьте в виде произведения:

а) $1 + 2 \sin \alpha = 2\left(\dfrac{1}{2} + \sin \alpha\right) = 2\left(\sin \dfrac{\pi}{6} + \sin \alpha\right) = \ldots$;

б) $1 - 2 \cos \alpha$; в) $\sqrt{3} - 2 \sin \alpha$.

5. Формулы для двойных и половинных углов

Т е о р е м а 1. *Для любого угла α справедливо равенство*

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Это равенство называют *формулой синуса двойного угла.*

Эту теорему можно сформулировать так: синус угла 2α равен удвоенному произведению синуса угла α на косинус угла α.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя формулу синуса суммы двух углов, получим

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) = \\ &= \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. *Для любого угла α справедливо равенство*

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Это равенство называют *формулой косинуса двойного угла.*

Эту теорему можно сформулировать так: косинус угла 2α равен квадрату косинуса угла α минус квадрат синуса угла α.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя формулу косинуса суммы двух углов, получим

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) = \\ &= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Пример 1. Найдем $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = \dfrac{3}{5}$ и α принадлежит интервалу $\left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Для любого угла α из указанного интервала $\cos\alpha$ отрицателен, поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{4}{5}.$$

Следовательно,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{24}{25},$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{7}{25}.$$

Теорема 3. *Для любого угла α справедливо равенство*

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Это равенство называют *формулой квадрата синуса половинного угла.*

Теорема 4. *Для любого угла α справедливо равенство*

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Это равенство называют *формулой квадрата косинуса половинного угла.*

Доказательство теорем 3 и 4. Используя формулу косинуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество, имеем

$$\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2},$$

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Складывая и вычитая эти равенства, получим

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

откуда и следуют формулы (1) и (2).

Пример 2. Найдем $\cos\frac{\pi}{8}$.

Применяя формулу квадрата косинуса половинного угла, имеем

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

Так как $\cos\frac{\pi}{8}$ положителен, то

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Пример 3. Найдем $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$ и угол α принадлежит интервалу $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Так как угол α принадлежит указаиному интервалу, то $\cos\alpha$ отрицателен, и поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{7}{9}.$$

Применяя формулу квадрата синуса половииного угла, получаем

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{8}{9}.$$

Легко видеть, что угол $\frac{\alpha}{2}$ приiадлежит интервалу $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$, поэтому $\sin\frac{\alpha}{2}$ положителен. Теперь иаходим, что $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

---

903. Запишите формулу:
а) синуса двойного угла;
б) косинуса двойного угла.

904. Чему равеи квадрат:
а) синуса половиииого угла;
б) косииуса половииного угла?

905. Запишите следующие углы в виде 2α, где α — некоторый угол:
а) $30°$; б) $90°$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{3}$; д) 4π; е) π; ж) $\frac{3\pi}{2}$.

906. Упростите выражеине:
а) $2\sin 15°\cos 15°$; б) $4\sin 22°30'\cos 22°30'$;
в) $5\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$; г) $\cos(-15°)\sin(-15°)$.

907. Вычислите $\sin 2\alpha$, если:
а) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Упростите выражеиие **(908—909)**:

908. а) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$; б) $\sin^2 15° - \cos^2 15°$;
в) $\cos^2 20° - \sin^2 20°$; г) $(\sin\alpha + \cos\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)$.

909. а) $\sin^2\frac{\pi}{8} - \cos^2\frac{\pi}{8}$; б) $2\sin 50°\sin 40°$;
в) $\cos^2 15° - \cos^2 75°$;
г) $(\sin 80° + \sin 10°)(\cos 80° - \cos 10°)$.

910. Выразите $\cos 2\alpha$ только через:
а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$.

911. Если $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то что больше:
а) $\cos 2\alpha$ или $2\cos\alpha$; б) $\sin 2\alpha$ нли $2\sin\alpha$?

912. Существуют ли углы α, для которых выполняется равенство $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$ $\left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$?

913. Вычислите:
а) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8}$; б) $2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1$.

914[1]**.** Упростите выражение:

а) $\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha$;
б) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha$;
в) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}$;
г) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$;
д) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$;
е) $\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$;
ж) $\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos 2\alpha}$;
з) $\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha+1}{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}$;
и) $\mathrm{tg}\,\alpha(1+\cos 2\alpha)$;
к) $(1-\cos 2\alpha)\,\mathrm{ctg}\,\alpha$;
л) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$;
м) $\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha$.

915. Докажите справедливость равенства:

а) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\alpha = \sin 2\alpha$;
б) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = -\cos 2\alpha$;
в) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = 1+\sin 2\alpha$;
г) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2 = 1-\sin 2\alpha$.

916. Докажите формулу:

а) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$;
б) $\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$;
в) $\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$.

917. Найдите $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ и $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{5}$, $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{2}{5}$.

918. Вычислите:

а) $\frac{\mathrm{tg}\,39^\circ+\mathrm{tg}\,6^\circ}{1-\mathrm{tg}\,39^\circ\,\mathrm{tg}\,6^\circ}$;
б) $\frac{\mathrm{tg}\,72^\circ-\mathrm{tg}\,12^\circ}{1+\mathrm{tg}\,72^\circ\,\mathrm{tg}\,12^\circ}$;
в) $\mathrm{tg}\,75^\circ$; г) $\mathrm{tg}\,15^\circ$; д) $\mathrm{tg}\,105^\circ$.

919*. При каких значениях α верно равенство:

а) $\mathrm{tg}(45^\circ+\alpha) = \frac{1+\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}\,\alpha}$;
б) $\mathrm{tg}(45^\circ-\alpha) = \frac{1-\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}\,\alpha}$?

920. Докажите справедливость равенства:

а) $\frac{1}{1-\mathrm{tg}\,\alpha} - \frac{1}{1+\mathrm{tg}\,\alpha} = \mathrm{tg}\,2\alpha$;
б) $\sin 2\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha = \cos 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

921. Запишите следующие углы в виде $\frac{\alpha}{2}$, где α — некоторый угол: 30°; 180°; π; 2π.

922. Докажите справедливость равенства:

а) $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$;
б) $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$;
в) $\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha} = \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$;
г) $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;
д) $\frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} + \frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{tg}\,\alpha$;
е) $\frac{1}{1-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} = \mathrm{tg}\,\alpha$;

---

[1] Здесь и далее имеются в виду такие значения α, при которых рассматриваемые выражения имеют смысл.

ж) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\alpha;$ з) $\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\cos\alpha.$

923. Вычислите $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

924. Вычислите $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

925. Упростите выражение:

а) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha;$ б) $2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha;$

в) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha};$ г) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}.$

926. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}135°$; б) $\operatorname{ctg}120°$; в) $\operatorname{tg}210°$; г) $\operatorname{ctg}330°$;

д) $12\sin 120°\operatorname{tg}300°\operatorname{ctg}225°$;

е) $20\sin 330°\cos(-240°)\operatorname{tg}120°-2\cos 150°\operatorname{tg}(-135°)$;

ж) $\cos 20°+\cos 40°+\cos 60°+\ldots+\cos 160°+\cos 180°$;

з) $\operatorname{tg}20°+\operatorname{tg}40°+\operatorname{tg}60°+\ldots+\operatorname{tg}160°+\operatorname{tg}180°$.

927. Упростите выражение:

а) $\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right);$

б) $\sin(90°-\alpha)-\cos(180°-\alpha)+\operatorname{tg}(180°-\alpha)-\operatorname{ctg}(270°+\alpha).$

928. Докажите справедливость равенства:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}(90°+\alpha)\cos(270°+\alpha)\cos(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(180°-\alpha)\sin(270°+\alpha)}=\sin\alpha$

для $\alpha\neq 90°k$, где k — некоторое целое число;

б) $\dfrac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\alpha-2\pi)}+\dfrac{\cos^2(-\alpha)}{\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}=1$

для $\alpha\neq\frac{\pi}{2}k$, где k — некоторое целое число.

929. Докажите справедливость равенства:

а) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

в) $\sin 2\alpha(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)+\cos 2\alpha(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)=2\cos^2(\alpha-\beta)$;

г) $\sin 2\alpha(\sin 2\alpha-\sin 2\beta)+\cos 2\alpha(\cos 2\alpha-\cos 2\beta)=2\sin^2(\alpha-\beta)$;

д) $\cos^3\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}\sin 4\alpha$;

е) $2\sin 2\alpha\sin\alpha+\cos 3\alpha=\cos\alpha$;

ж) $1+2\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=4\cos^2\alpha\cos 2\alpha$;

з) $1+2\cos 3\alpha+\cos 6\alpha=4\cos^2\frac{3\alpha}{2}\cos 3\alpha$;

и) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$;

к) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

930*. Вычислите:

а) $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$; б) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$.

931. Найдите:

а) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$ и $\operatorname{ctg}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$;

б) $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$ и $\operatorname{ctg}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7}$;

в) $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$.

6. Произведение синусов и косинусов

Теорема. *Для любых углов α и β справедливы равенства*

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)); \qquad (1)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)); \qquad (2)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)). \qquad (3)$$

Доказательство. Выпишем известные формулы синусов и косинусов суммы и разности двух углов:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha; \qquad (4)$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha; \qquad (5)$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta; \qquad (6)$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \qquad (7)$$

Сложив почленно равенства (4) и (5), получим

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$

откуда получаем справедливость равенства (1).

Сложив почленно равенства (6) и (7), получим

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta,$$

откуда получаем справедливость равенства (2).

Вычтем почленно из равенства (7) равенство (6), получим

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta,$$

откуда получаем справедливость равенства (3).

Формулы (1), (2), (3) используют для преобразования тригонометрических выражений.

Пример 1. Вычислим без таблиц и калькулятора

$$\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}.$$

Применив формулу (2), имеем

$$\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Пример 2. Докажем справедливость равенства

$$(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)\sin\alpha = \sin 2\alpha \sin 3\alpha. \tag{8}$$

Раскрыв скобки в левой части равенства (8) и применив формулу (3), имеем

$$(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)\sin\alpha = \sin 2\alpha\sin\alpha + \sin 4\alpha\sin\alpha =$$
$$= \frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos 3\alpha) + \frac{1}{2}(\cos 3\alpha - \cos 5\alpha) =$$
$$= \frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 3\alpha - \cos 5\alpha) = \frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos 5\alpha).$$

Преобразуем по формуле (3) правую часть равенства (8):

$$\sin 2\alpha\sin 3\alpha = \frac{1}{2}(\cos(2\alpha - 3\alpha) - \cos(2\alpha + 3\alpha)) =$$
$$= \frac{1}{2}(\cos(-\alpha) - \cos 5\alpha) = \frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos 5\alpha).$$

Так как правая и левая части доказываемого равенства (8) равны одному и тому же выражению, то равенство (8) доказано.

932. Преобразуйте в сумму или разность:

а) $\cos 3\alpha\cos\alpha$; б) $\sin 5\alpha\sin 3\alpha$; в) $\sin 4\alpha\cos 2\alpha$;
г) $\cos\alpha\cos 2\alpha$; д) $\sin 2\alpha\sin 3\alpha$; е) $\sin\alpha\cos 4\alpha$.

933. Докажите, что:

а) $\sin\frac{9\pi}{28}\cos\frac{5\pi}{28} - \sin\frac{6\pi}{35}\cos\frac{\pi}{35} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{5}$;

б) $\cos\frac{3\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16} - \cos\frac{5\pi}{16}\cos\frac{3\pi}{16} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

934. Вычислите:

а) $\sin\frac{11\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}$; б) $\cos\frac{13\pi}{24}\cos\frac{7\pi}{24}$; в) $\sin\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}$;

г) $\cos\frac{7\pi}{20}\cos\frac{3\pi}{20} - \sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{4\pi}{15}$;

д) $\cos\frac{11\pi}{56}\cos\frac{3\pi}{56} - \sin\frac{11\pi}{42}\sin\frac{17\pi}{42}$.

7. Исторические сведения

Понятия синуса, косинуса и тангенса угла возникли в геометрии и астрономии. По существу, ими оперировали еще древние математики, рассматривая отношение отрезков в треугольниках и окружностях. Знаменитый древнегреческий ученый Клавдий Птолемей, живший во II в., для своих астрономических исследований составил подробную, весьма точную таблицу синусов углов, в течение многих веков служившую средством для решения треугольников.

В XI—XIII вв. в трудах математиков Средней Азии, Закавказья, Ближнего Востока и Индии началось формирование тригонометрии как отдельной науки. У индийских ученых линия синусов именовалась «архаджива», что буквально означало «половина тетивы лука». В Индии были составлены таблицы значений синусов для всех углов от 0° до 90° через каждые 3°45′. Эти таблицы были точнее таблиц Птолемея. Об их высокой точности говорит тот факт, что для синуса и косинуса 3°45′ были вычислены значения $\frac{100}{1529}$ и $\frac{466}{467}$, отличающиеся от истинных менее чем на 0,00000001.

Большая заслуга в формировании тригонометрии как отдельной науки принадлежит азербайджанскому ученому Насиру ад-Дину Мухаммаду ат-Туси (1201—1274). Однако и в его трудах еще не была введена необходимая символика, и поэтому развитие тригонометрии происходило очень медленно.

В XV в. немецкий ученый Иоганн Мюллер (1436—1476), известный в науке под именем Региомонтан, издал труд «Пять книг о треугольниках всех видов», сыгравший важную роль в развитии тригонометрии.

В XV—XVII вв. в Европе было составлено и издано несколько тригонометрических таблиц. Над их составлением работали Н. Коперник (1473—1543), И. Кеплер (1571—1630), Ф. Виет (1540—1603) и др. В России первые тригонометрические таблицы были изданы в 1703 г. при участии Л. Ф. Магницкого.

Современный вид тригонометрия получила в трудах Л. Эйлера. Он, в частности, вывел все тригонометрические формулы из нескольких основных, установил несколько неизвестных до него формул, ввел единообразные знаки. Впервые в его трудах встречаются записи $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и др. На основании работ Л. Эйлера были составлены учебники тригонометрии, излагавшие ее в строгой научной последовательности.

8. Задания для повторения

935. Вычислите:

а) $\dfrac{8,4\cdot\left(1\frac{5}{8}+\frac{17}{18}\right)-15\frac{59}{60}}{646,8:21}$; б) $\dfrac{\left(1\frac{13}{16}+1\frac{17}{24}\right)\cdot\frac{4}{13}}{28\frac{14}{15}:2,8-4\frac{11}{12}}$;

в) $\dfrac{4,58+6,275:(1,25^3-1,25^2\cdot 0,45)}{49,533:16,5-2,522}$;

г) $\dfrac{1,476+2,08\cdot 4,05}{49,938:(0,16\cdot 12,34^2-0,16^3)-0,25}$;

д) $\dfrac{42,5904:6,08-1,245}{(18,2^2-5,6^2+23,8\cdot 7,4):5,95+35,2}$.

Упростите выражение[1] **(936—941)**:

936. а) $\left(\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\right):\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\right)$;

[1] Здесь и далее имеются в виду такие значения букв, при которых рассматриваемые выражения имеют смысл.

б) $\frac{a-2}{a(a-2)+4}+\frac{8+4(1-a)+a^2}{8+a^3}-\frac{1}{2+a}$.

937. а) $a:\frac{a-1}{2}-\frac{a^2+3a(a-1)-1}{2a^2+2a}\cdot\frac{-4a}{a^2+1-2a}-\frac{4a^2}{a^2-1}$;

б) $\left(\frac{3}{2}-\left(x^4-\frac{x^4+1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x^3-x(4x-1)-4}{x^7+6x^6-x-6}\right):\frac{x^2+29x+78}{3x^2+12x-36}$.

938. а) $\left(\frac{x^2-x-6}{x^2-4}-\frac{x^2-4x-5}{x^2-7x+10}\right):\frac{4x+16}{x-2}$;

б) $\left(\frac{x^2-3x-10}{x^2-25}-\frac{x^2+x-12}{x^2-8x+15}\right):\frac{4x+10}{5-x}$.

939. а) $(2\sqrt{38}-\sqrt{57})\cdot\frac{2}{19}\cdot\sqrt{19}+\sqrt{12}$;

б) $(\sqrt{14}-2\sqrt{35})\cdot\frac{1}{7}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{20}$;

в) $\sqrt{200}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{32}+2\sqrt{72}$;

г) $\frac{1}{5}\sqrt{300}-\frac{2}{3}\sqrt{27}+\sqrt{75}$.

940. а) $\dfrac{\frac{a^{1,5}+b^{1,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}-a^{0,5}b^{0,5}}{a-b}+\frac{2b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}$;

б) $\dfrac{3^{1,5}}{(3^{0,5})^3a^{\frac{1}{6}}-a^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{a^{\frac{5}{6}}+3^{1,5}a^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{1}{3}}+3\right)^2}\cdot\left(\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}-b}-\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}}\right)$.

941. а) $\left(a+b^{\frac{3}{2}}:\sqrt{a}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

б) $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2a^2:\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}$.

Найдите значение выражения **(942—944)**:

942. а) $(a^2-1)\cdot\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}+1\right)$ при $a=-0{,}03$;

б) $\left(\frac{1}{p+1}-\frac{3}{p^3+1}+\frac{3}{p^2-p+1}\right)\cdot\left(p-\frac{2p-1}{p+1}\right)$ при $p=-\frac{1}{3}$.

943. а) $\left(\frac{4x}{4-x^2}-\frac{x-2}{4+2x}\right)\cdot\frac{4}{x+2}-\frac{x}{1-x^2}$ при $x=-1{,}5$;

б) $\frac{a}{1-a}-\frac{1-a^2}{1+a^2}\cdot\left(\frac{1}{(a-2)^2}-\frac{a}{1-a^2}\right)$ при $a=2{,}5$.

944. а) $\left(\frac{9}{m^2-9}+\frac{3}{(3-m)^2}\right)\cdot\frac{(m-3)^2}{6}+\frac{6}{3+m}$ при $m=2\frac{1}{2}$;

б) $\left(\frac{2}{4-p^2}-\frac{2}{(p-2)^2}\right)\cdot\frac{(2-p)^2}{4}-\frac{2}{p+2}$ при $p=1{,}5$.

945. Запишите многочлен, корнями которого являются числа:
а) 1; 2; 3; 4; б) −2; −1; 0; 6.

946. Представьте многочлен в виде произведения линейных множителей:
а) $x^3 - 6x$; б) $x - 5x^3$;
в) $3x^2 - 25$; г) $x^3 - 2$;
д) $2x^2 + 8x - 7$; е) $3x^2 - 5x + 2$;
ж) $3x^2 - 6x + 12$; з) $8x^3 + 54x + 36x^2 + 27$.

Разложите многочлен на линейные множители, считая, что a и b — данные числа (**947—949**):

947. а) $x^2 - (1 + a)x + a$; б) $4x^2 - 2(1 + a)x + a$.

948. а) $2ax^2 - (2 + a)x + 1$; б) $6 + (2 - 3a)x - ax^2$.

949. а) $(b - 2a)x + 2 - abx^2$; б) $b - (a + b^2)x + abx^2$.

950. Разложите многочлен на множители:
а) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$;
б) $x^{10} + x^2 + 1$;
в) $x^8 + x^4 + 1$.

951. При каких значениях p уравнение $2x^2 + x + 2p^2 = 0$:
а) не имеет действительных корней;
б) имеет равные корни;
в) имеет неравные корни?

952. Решите уравнение, считая, что k — данное число:
а) $x^2 + 2kx + (k - 1)^2 = 0$; б) $x^2 - kx + k - 1 = 0$.

953. Укажите условия, при выполнении которых квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c — рациональные числа, имеет иррациональные корни.

954. Покажите с помощью графика, что уравнение $2x^2 + 3x + m = 0$:
а) при $m < 0$ имеет два действительных корня разных знаков, причем абсолютная величина отрицательного корня больше абсолютной величины положительного корня;
б) при $0 < m < 1\frac{1}{8}$ уравнение имеет два различных отрицательных корня;
в) при $m > 1\frac{1}{8}$ уравнение не имеет действительных корней.

955*. Исследуйте с помощью графика зависимость числа корней уравнения от a, где a — данное число:
а) $x^2 - x + a = 0$; б) $x^2 + x - a = 0$;
в) $x^2 - 4x + a = 0$; г) $x^2 + ax + 4 = 0$;
д) $0{,}2x^2 + 2{,}1x + a = 0$; е) $3x^2 + 7ax + 4 = 0$.

956. При каких значениях a, b, c (или при каких отношениях между ними) для квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$:
а) сумма корней этого трехчлена равна их произведению;
б) корни этого трехчлена равны по абсолютной величине?

957. Многочлен $x^4 + 2x^3 + mx^2 + 2x + n$ является квадратом другого многочлена. Найдите числа m и n.

958. Какими числами должны быть p и q, чтобы корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ были равны p и q?

959. При каком значении a сумма квадратов чисел, составляющих решеиие системы уравнений

$$\begin{cases} x-2y=a, \\ 2x-y=a+1, \end{cases}$$

будет иаименьшей?

Решите систему уравиеиий (**960—964**):

960. а) $\begin{cases} x+xy+y=11, \\ x-xy+y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3-y^3=8(x-y), \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$

961. а) $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4, \\ x+xy+y=2. \end{cases}$

962. а) $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=447, \\ xy(x-y)=210; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy(x+y)=20, \\ x+y=\frac{5}{4}xy. \end{cases}$

963. а) $\begin{cases} x+y^2=3, \\ x^2+y=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+xy=y^2, \\ x-y^2=0. \end{cases}$

964. а) $\begin{cases} xy=6, \\ yz=3, \\ xz=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} yz=\frac{2}{3}x, \\ zx=\frac{3}{2}y, \\ xy=6z. \end{cases}$

Решите графическим способом систему уравнеиий (**965—967**):

965. а) $\begin{cases} xy=-6, \\ y=-x^2+5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=x^2-4, \\ xy=4. \end{cases}$

966. а) $\begin{cases} y=x^2-2x-3, \\ y=|x-1|; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=-x^2+5x-6, \\ y=|x+1|. \end{cases}$

967. а) $\begin{cases} y=2x^2-1, \\ y=-x^2-3x-2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=x^2+5x+4, \\ y=-x^2+6. \end{cases}$

968. Решите уравнение:

а) $\frac{5-2x}{x^2-x}+\frac{2}{x}=\frac{3x}{x-1}$;

б) $\frac{2x}{x+1}+\frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{3}{x-1}$;

в) $\frac{6}{x^2-9}+\frac{2}{x^2+4x}=\frac{7}{x^2+x-12}$.

Решите неравенство (**969—971**):

969. а) $\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}<\frac{8}{x^2-1}$; б) $\frac{4}{x+1}-\frac{x}{x-1}>\frac{3}{x^2-1}$.

970. а) $1<\frac{3x-1}{2x+1}<2$; б) $1<\frac{2x-1}{3x+1}<2$.

971. а) $(1+x)^2<|1-x^2|$; б) $|1-x^2|<(1-x)^2$.

972. Докажите, что произведение двух последовательных натуральных чисел не может быть равным $25k+1$ при натуральном k.

973. Дан многочлен x^3-5x^2+8x. Известно, что если значение x увеличить на 1, то значение многочлена не изменится. Найдите это значение x.

974. Докажите, что если некоторое число при делении на 9 дает в остатке 1 или 8, то квадрат этого числа при делении на 9 дает в остатке 1.

975. Представьте ab в виде разности квадратов двух выражений.

976. Найдите двузначное число, равное удвоенному произведению его цифр.

977. Найдите x и y, зная, что $xy=1$ и что $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$.

978. Найдите цифры a и b пятизначного числа $\overline{42a4b}$, если известно, что это число делится нацело на 72.

979. На какую цифру оканчивается число 7^{100}?

980. Какой цифрой оканчивается сумма $21^4+34^4+46^4$?

981. Докажите, что если $n>1$ и n — нечетное число, то число вида $n^{12}-n^8-n^4+1$ делится нацело на 128.

982. Один из корней уравнения $x^2-x-a=0$ равен $a+1$. Найдите другой его корень.

983. При каком значении b уравнение

$$x^2+b^2x+3b^3=2b^2x-b+12+2b^3$$

имеет корень $x=3$?

984. Может ли быть целым числом выражение $\frac{a+9}{a+8}$? Если да, то при каком значении a (a — целое)?

985. Какое число больше:

а) $\frac{10^{1986}+1}{10^{1987}+1}$ или $\frac{10^{1987}+1}{10^{1988}+1}$; б) $\frac{a^n+1}{a^{n+1}+1}$ или $\frac{a^{n+1}+1}{a^{n+2}+1}$,

где a и n — натуральные числа?

986*. *Задача Бхаскары II (1114 — ок. 1178).* Решите уравнение в целых числах:

$$100x+90=63y.$$

987*. *Старинная задача.* Идет корабль по морю, на нем мужеска полу и женска 120 человек. Всего заплатили 120 гривен, мужчины дали по 4 алтына, а женщины дали по 3 алтына с человека. Сколько мужеска полу и женска порознь?

988*. *Задача Л. Н. Толстого.* На 100 р. купили 100 скотин — телят по полтине, коров по 3 р., быков по 10 р. Сколько купили телят, коров и быков?

989. Постройте график функции:

а) $y=\frac{1}{x-1}$; б) $y=\frac{1}{x+2}$; в) $y=\frac{1}{1-x}$;

г) $y=\frac{4}{4-x}$; д) $y=\frac{1}{x-1}+1$; е) $y=\frac{1}{2-x}-3$;

ж) $y=\frac{3}{x+2}-1$; з) $y=\frac{2}{x-3}+4$; и) $y=\frac{x+1}{x-1}$;

к) $y=\frac{x-3}{x+4}$; л) $y=\frac{2x-1}{3x-1}$; м) $y=\frac{3x+1}{2x-1}$.

990. Используя график функции, решите неравенство:

а) $\frac{1}{x}>0$; б) $\frac{1}{x}<0$; в) $-\frac{2}{x}>0$; г) $-\frac{4}{x}<0$;

д) $\frac{1}{x}>1$; е) $\frac{1}{x}<2$; ж) $\frac{2}{x}>3$; з) $-\frac{2}{x}>3$.

991. Используя график функции, решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy=1, \\ y=x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy=-8, \\ y=x+1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y=x^2-4x-5, \\ y=-\frac{12}{x}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y=|x|, \\ y=\frac{6}{x}. \end{cases}$

992. *Задача П. Л. Чебышева.* Мальчик сказал: «Если мне дадут еще 40 орехов, то у меня будет столько же, сколько у моего брата. А если мне дадут 90 орехов, то у меня станет в 2 раза больше, чем у моего брата». Сколько орехов у каждого?

993. *Старинная задача (Китай, I в.).* Сообща покупают вещь. Если каждый человек внесет по 8 (денежных единиц), то избыток равен 3. Если каждый человек внесет по 7, то недостаток равен 4. Спрашивается количество людей и стоимость вещи.

994. *Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.* Некто желает дать милостыню убогим, дав каждому из них по 3 пенязи, но недостает денег на 3 человека. Если бы дал им по 2 пенязи, тогда бы осталось денег на 4 человека. Спрашивается, сколько было убогих, и сколько у того мужа было денег.

995. *Старинная задача (Китай, II в.).* Сообща покупают курицу. Если каждый человек внесет по 9 (денежных единиц), то останется 11, если же каждый человек внесет по 6, то не хватит 16. Найти количество людей и стоимость курицы.

996. *Старинная задача (Китай, II в.).* Сообща покупают буйвола. Если каждые семь семей внесут по 190 (денежных единиц), то недостаток равен 330. Если же каждые девять семей внесут по 270, то избыток равен 30. Сколько семей и сколько стоит буйвол?

997. Периметр прямоугольника равен 16 дм, а его площадь равна 15 дм^2. Определите стороны этого прямоугольника.

998. Квадрат меньшего из двух натуральных чисел равен их сумме, а разность этих чисел равна 15. Найдите эти числа.

999. Найдите два числа, если они находятся в отношении $2:3$, а их сумма равна 20.

1000. Найдите значение x, для которого соответствующее значение y является наименьшим, если:

а) $y=(x+1)^2-3$; б) $y=(x-2)^2+5$.

1001. Два каменщика выкладывают стену за три дня. За сколько дней выполнят эту работу три каменщика, если производительность труда у всех рабочих одинаковая?

1002. Найдите два числа, если они находятся в отношении $3:2$ и их:

а) сумма равна 20; б) разность равна 20;

в) произведение равно 150; г) частное равно 5.

1003. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, а через четверть часа вслед за ним выехал автомобиль. В середине пути между A и B автомобиль догнал велосипедиста. Когда автомобиль прибыл в пункт B, велосипедисту осталось проехать еще треть пути. Какое время затратил на путь от A до B велосипедист и какое — автомобиль, если известно, что скорости велосипедиста и автомобиля постоянны?

1004. Проценты содержания (по массе) красителя в трех растворах образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третий растворы в отношении $2:3:4$, то получится раствор, содержащий 32% красителя. Если же смешать их в отношении $3:2:1$, то получится раствор, содержащий 22% красителя. Сколько процентов красителя содержит первый раствор?

1005. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 100 км, выехал мотоциклист, и одновременно с ним из B в A выехал велосипедист. Через некоторое время они встретились в пункте C, расположенном между A и B, и, продолжив свой путь, прибыли в пункты назначения. На следующий день мотоциклист вернулся в A, а велосипедист — в B. При этом мотоциклист двигался в $\frac{3}{2}$ раза быстрее, чем накануне, и поэтому на весь путь из B в A затратил на 10 мин меньше, чем на путь от A до C в первый день. Скорость велосипедиста во второй день была на 10 км/ч выше, чем в первый день, и на весь путь от A до B он затратил в $\frac{5}{2}$ раза больше времени, чем на путь от B до C в первый день. С какой скоростью двигался мотоциклист в первый день на пути из A в B?

1006. Два пешехода одновременно вышли навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми равно 34 км.

В 4 км от пункта A первый пешеход (вышедший из A) сделал остановку на 1 ч 30 мин. После остановки он увеличил скорость на 2 км/ч и встретил второго пешехода в 18 км от пункта B. Если бы первый пешеход не делал остановки и шел все время с первоначальной скоростью, то пешеходы встретились бы на полпути. Определите скорость второго пешехода.

1007. Два куска одинаковой ткани стоят вместе 91 р. Когда из первого куска продали столько, сколько было первоначально во втором, а из второго половину того, что было первоначально в первом, то остаток первого куска оказался на 10 м больше остатка второго куска. Сколько метров ткани было в каждом куске, если 1 м ткани стоит 1,4 р.?

1008. Расстояние между пристанями A и B равно 48 км. Отчалив от пристани A в 9 ч утра, пароход поплыл по течению реки до пристани B. Простояв у пристани B один час, пароход отправился в обратный рейс и прибыл в A в 17 ч того же дня. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Найдите собственную скорость парохода, если известно, что на пути из A в B и из B в A она была одна и та же.

1009*. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 525 км, выехал мотоциклист. Через некоторое время из B в A выехала машина, которая встретилась с мотоциклистом в тот момент, когда он проехал $\frac{3}{7}$ расстояния от A до B. Мотоциклист и машина продолжали двигаться дальше, и мотоциклист приехал в B через 3 ч после того, как машина прибыла в A. Если бы машина выехала из B на 1,5 ч раньше, чем в действительности, то она встретилась бы с мотоциклистом на расстоянии 180 км от A. Определите скорость мотоциклиста.

1010. а) Сбербанк России с 1 октября 1993 г. за хранение денег на депозитном вкладе в течение года, шести и трех месяцев выплачивал доход в размере 150, 130 и 120 процентов соответственно. Какой доход можно было получить при этих условиях при двукратном вложении денег на шесть месяцев и четырехкратном — на три месяца?

б) Через несколько месяцев процентные ставки по депозитным вкладам Сбербанка России были уменьшены и составили 70, 60 и 50 процентов для депозитных вкладов на год, шесть и три месяца соответственно. Какой доход можно было получить при новых условиях при двукратном вложении денег на шесть месяцев и четырехкратном — на три месяца?

1011*. Каким наибольшим целым числом должен выражаться процент годовых для вкладов на шесть месяцев, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход меньшнй, чем вклад на один год под $p\%$ годовых? Каким наибольшнм целым числом должен выражаться процент годовых для вкладов на три месяца, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход меньший, чем вклад иа шесть месяцев?

а) Решите задачу в общем виде.

б) Получите ответ для $p = 150$ и $p = 70$.

1012*. Проливной дождь лил несколько часов подряд. Когда он наполнил иекоторую часть открытого бассейиа, включили насос для откачки воды. Он откачал воду за 5 ч, на протяжеиии которых дождь продолжал лить. Если бы вместо первого иасоса включили второй, мощиость которого в 2 раза больше, то он откачал бы воду за 2 ч. За сколько часов откачали бы воду два насоса при совместной работе? Считайте процессы наполиения бассейна и откачки воды равиомерными.

1013*. а) На лугу растет трава. 20 коров съедят всю траву за 21 день, а 30 коров — за 7 дней. За сколько дней всю траву на лугу моглн бы съесть 22 коровы?

б) На лугу растет трава. 6 коров съедят всю траву за 6 дией, а 7 коров — за 4 дня. Сколько коров могли бы съесть всю траву иа лугу за 2 дня?

в) На лугу растет трава. 60 коров могли бы прокормиться иа этом лугу в течеиие 14 дией, а 50 коров — в течеиие 28 дией. Сколько коров моглн бы пастись иа этом лугу постояиио, пока растет трава?

1014*. *Задача И. Ньютона.* Двенадцать быков съедают $3\frac{1}{3}$ югера[1] пастбнща за 4 иеделн; 21 бык съедает 10 югеров такого же пастбища за 9 недель. Сколько быков съедит траву иа 24 югерах пастбища за 18 иедель?

1015. а) Найдите разность арифметической прогрессии, если известно, что пятый ее член равен 19, а девятый члеи равен 35.

б) Найдите разность арифметической прогрессин, если известно, что четвертый ее член равен -13, а десятый члеи равен -43.

в) Разность арифметической прогрессии равна 9,5, а двеиадцатый члеи равен 105,25. Найдите первый член прогрессии.

г) Числа $\frac{1}{2}$ и $-1\frac{7}{8}$ — первый и двадцатый члеиы арифметической прогрессии. Найдите разиость этой прогрессии.

1016. а) Между чнслами 7 и 35 иа координатной прямой иайдите шесть точек, коордииаты которых вместе с числами 7 и 35 являются последовательными членами арифметической прогрессии.

---

[1] 1 югер — древняя римская мера площади около 2500 м^2.

б) Между числами 1 и 6 найдите пять чисел, которые вместе с заданными числами являются последовательными членами арифметической прогрессии.

1017. а) Как изменится разность конечной арифметической прогрессии, если порядок ее членов изменить на противоположный?

б) Сколько членов в конечной арифметической прогрессии, если ее крайние члены 10 и 7,5, а разность равна $-0{,}4$?

1018. Найдите формулу общего члена арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, если известно, что:

а) $a_1 = 5$, $a_2 = -5$; б) $a_1 = -3$, $a_2 = 0$;

в) $a_1 = 6$, $a_{10} = 33$; г) $a_4 = -4$, $a_{17} = -17$.

1019. Даны две геометрические прогрессии: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$. Является ли геометрической прогрессией последовательность:

а) $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots$;

б) $a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n, \ldots$;

в) $a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots, a_n \cdot b_n, \ldots$;

г) $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \ldots$ (все $b_i \neq 0$)?

1020. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, если известно, что:

а) $b_1 + b_4 = \frac{7}{16}$, $b_3 - b_2 + b_1 = \frac{7}{8}$; б) $b_2 - b_1 = 2$, $b_3 - b_1 = 8$.

1021. Найдите четыре числа b_1, b_2, b_3, b_4, если известно, что числа b_2, b_3, b_4 образуют конечную геометрическую прогрессию, а числа b_1, b_2, b_3 образуют конечную арифметическую прогрессию и $b_1 + b_4 = 37$, $b_2 + b_3 = 36$.

1022. Найдите три числа b_1, b_2, b_3, образующие конечную арифметическую прогрессию, если известно, что их сумма равна 30, а числа $b_1 - 5$, $b_2 - 4$, b_3 образуют конечную геометрическую прогрессию.

1023. Найдите n — число членов конечной геометрической прогрессии $b_1, b_2, \ldots, b_n$, если известно, что $b_1 + b_5 = 51$, $b_2 + b_6 = 102$, $S_n = 3069$.

1024. Найдите все числа x, удовлетворяющие следующему условию: $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$.

1025. Сумма трех чисел, образующих конечную арифметическую прогрессию, равна 2, а сумма квадратов этих же чисел равна $\frac{14}{9}$. Найдите эти числа.

1026. а) Сумма второго и девятого членов арифметической прогрессии равна 10. Найдите сумму десяти первых членов этой прогрессии.

б) Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 16. Найдите сумму первых 11 членов этой прогрессии.

027*. В конечной геометрнческой прогрессин четное число членов. Найдите ее знаменатель, если:

а) сумма всех членов прогрессни в 4 раза больше суммы ее членов, стоящих на нечетных местах;

б) сумма всех членов прогрессии, стоящнх на четных местах, в 2 раза больше суммы ее членов, стоящих на нечетных местах.

1028. При завннчнваннн шестигранной гайки гаечный ключ повернули на «две гранн». Выразнте в градусах велнчину угла, на который повернулн гаечный ключ, если учесть, что угол поворота отрнцательный.

1029. Определнте в градусах величииу угла, описываемого минутной стрелкой часов за:

а) 5 мнн; б) 15 мнн; в) 45 мнн;
г) 1 ч; д) 3 ч 20 мнн; е) полсуток.

1030. На какой угол надо повернуть мннутную стрелку часов, чтобы перевестн часы:

а) вперед на 10 мнн; б) назад на 1 ч 12 мнн?

1031. Прн регулнровке карбюратора автомашины вннт холостого хода повернулн протнв часовой стрелкн на 1,75 полного оборота. Выразите угол поворота в градусах.

1032. Ведро в колодце поднимается на 2 м, еслн рукоятку ворота повернуть иа 5 полных оборотов по часовой стрелке. На какой угол (в градусах) надо повернуть рукоятку, чтобы ведро:

а) поднялось на 1,5 м; б) опустнлось на 3 м?

1033. Окружность морского компаса разделена на 32 равные части, называемые **румбами**. Выразнте в градусах углы 1, 2, 10, 15 румбов.

1034. Артнллернсты измеряют углы поворота с помощью $\frac{1}{6000}$ частн полного оборота, называемой **тысячной**. Выразите в тысячных углы 30°, 60°, 90°.

1035. В 1799 г. Парижская Академня наук ввела метрическую еднницу нзмерення углов, которая называлась **град**. 1 град равен 0,01 части прямого угла. Выразнте в градах углы 90°, 120°, 150°.

1036. В астрономни нспользуется единица измерення долготы места, называемая **часом**. Час долготы равен $\frac{1}{24}$ части полного оборота (360°), на который Земля поворачнвается за сутки. 1 час содержит 60 минут, а 1 минута содержит 60 секунд. Выразнте час, минуту и секунду долготы в градусах, минутах и секундах.

1037. Углы треугольннка относятся между собой как 3 : 4 : 5. Определите радnанные меры этих углов с точностью до 0,01.

1038. В равнобедренном треугольнике угол при вершине в 2 раза меньше угла при основании. Определите радианные меры этих углов с точностью до 0,01.

1039. Шкив электромотора делает 2000 оборотов в минуту. Определите угловую скорость вращения шкива (в радианах в секунду).

1040. Какую линейную скорость имеет точка, удаленная от оси вращения на 2 см, если угловая скорость вращения равна $\frac{\pi}{2}$ радиана в секунду?

1041. Запишите все углы, которым соответствуют точки пересечения единичной окружности:

а) с осями координат;

б) с биссектрисами координатных углов.

1042. Как расположены на единичной окружности точки, соответствующие углам:

а) α и $-\alpha$; б) α и $\alpha + \pi$;

в) $\alpha + \pi$ и $\alpha - \pi$; г) $\alpha + 2\pi k$ и α;

д) $\frac{\pi}{2} - \alpha$ и $\frac{\pi}{2} + \alpha$; е) $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ и $\frac{3\pi}{2} + \alpha$,

где k — некоторое целое число?

1043. Вычислите:

а) $2\sin\frac{\pi}{6} + 3\cos\frac{\pi}{6} - 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6} - 1{,}5\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{6} + \frac{3}{\sin\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}$;

б) $2\sin 45^\circ + 2\cos 45^\circ - 3\,\mathrm{tg}\,45^\circ - 10\,\mathrm{ctg}\,45^\circ + \frac{2}{\sin 45^\circ} - \frac{4}{\cos 45^\circ}$;

в) $\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} - 2\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3} - 1{,}5\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} + \frac{3}{\sin\frac{\pi}{3}}$;

г) $\sin\frac{\pi}{2} - 6\cos\frac{\pi}{2} + 3\,\mathrm{tg}\,0 + \frac{5}{\cos 0}$;

д) $2\sin 180^\circ - 3\cos 180^\circ + 4\,\mathrm{tg}\,180^\circ + \frac{2}{\cos 180^\circ}$;

е) $3\sin\frac{3\pi}{2} - 4\cos\frac{3\pi}{2} + 5\,\mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{2}}$;

ж) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{2}\cos^4\frac{3\pi}{2}}$;

з) $\dfrac{\frac{1}{\cos(-30^\circ)} + \frac{1}{\sin(-30^\circ)}}{\sin^2(-60^\circ) + \frac{1}{\sin(-30^\circ)}}$.

1044. Найдите все значения угла β $(0 < \beta < 2\pi)$, при каждом из которых справедливо неравенство:

а) $\sin\beta\cos\beta > 0$; б) $\sin\beta\cos\beta < 0$.

1045. а) Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

б) Найдите $\cos\beta$, $\sin\beta$ и $\operatorname{tg}\beta$, если $\operatorname{ctg}\beta = 2$ и $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

1046. Определите знак числа:

а) $\frac{\cos 10 \sin 7 - \operatorname{tg} 10}{\cos(-\sqrt{2}) \operatorname{ctg}(-4)}$; б) $\frac{\sin(-3)\cos 4 \operatorname{tg}(-5)}{\operatorname{ctg} 6}$;

в) $\frac{(\sin 3 \cos 4 - \sin 4 \cos 3)(\sin 3 \cos 4 + \sin 4 \cos 3)}{(\cos 3 \cos 4 - \sin 3 \sin 4)(\cos 3 \cos 4 + \sin 3 \sin 4)}$.

1047. Вычислите:

а) $$\frac{\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\left(\operatorname{tg}(-\pi) - \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 10\pi\right)\cos\left(-\frac{2\pi}{3} + 10\pi\right)};$$

б) $$\frac{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{3\pi}{4}}.$$

1048. Докажите справедливость равенства

а) $\operatorname{ctg}(\alpha + 3\pi)\sin(2\pi - \alpha) - \cos(\alpha - \pi) - \sin(\alpha - \pi) = \sin\alpha$ при $\alpha \neq \pi k$, где k — любое целое число;

б) $3\operatorname{tg}(\alpha - 5\pi)\cos(\pi - \alpha) + \sin(-\alpha - \pi) + 2\sin(\pi - \alpha) = 0$ при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где k — любое целое число.

1049. Упростите выражение:

а) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$;

б) $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$.

1050. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha = 0{,}6$, $\cos\beta = -\frac{12}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

1051. Найдите $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\beta = 0{,}8$ и $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

1052. Вычислите:

а) $\cos 37°30' \cos 7°30'$; б) $\sin 75° \sin 15°$;

в) $\cos 15° \cos 75°$; г) $\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{24}$;

д) $\sin 15° + \operatorname{tg} 30° \cos 15°$; е) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{12} + \operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$;

ж) $\frac{\operatorname{tg} 13° + \operatorname{tg} 17°}{1 - \operatorname{tg} 13° \operatorname{tg} 17°}$; з) $\frac{\operatorname{tg} 1° - \operatorname{tg} 46°}{1 + \operatorname{tg} 1° \operatorname{tg} 46°}$;

и) $\frac{\operatorname{tg} 113° + \operatorname{tg} 7°}{1 - \operatorname{tg} 113° \operatorname{tg} 7°}$; к) $\frac{\operatorname{tg} 150° - \operatorname{tg} 15°}{1 + \operatorname{tg} 150° \operatorname{tg} 15°}$.

1053. Докажите справедливость равенства:

а) $\sin 10° \cos 20° \cos 40° = \frac{1}{8}$; б) $\cos 20° \cos 40° \cos 80° = \frac{1}{8}$;

в) $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$; г) $\sin 18° \cos 36° = \frac{1}{4}$.

1054. Докажите, что если α, β и γ — углы треугольннка, то справедлнвы равенства н неравенство:

а) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

б) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 1$;

в) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma > 2$, где $\alpha < 90°$, $\beta < 90°$, $\gamma < 90°$.

1055. Докажнте справедливость равенства:

а) $\cos 2\alpha(\sin\alpha + \sin 3\alpha) = \sin 2\alpha(\cos\alpha + \cos 3\alpha)$;

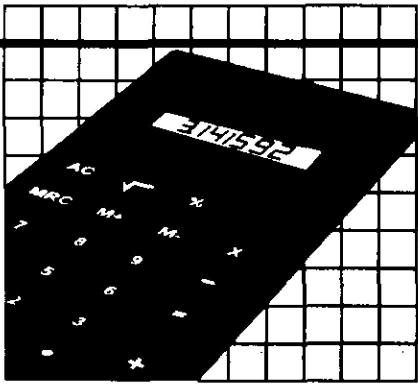
б) $(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 = 1$.

1056. Найдите все углы α, для каждого из которых одновременно имеют смысл обе части равенства:

а) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$;

б) $\cos^2\alpha(\operatorname{tg}\alpha + 2)(2\operatorname{tg}\alpha + 1) = 5\sin\alpha\cos\alpha + 2$.

Для найденных углов α докажнте справедливость равенства.



ГЛАВА V

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 9. ПРИБЛИЖЕНИЯ ЧИСЕЛ

9.1. Абсолютная величииа числа

Напомним, что абсолютная величина числа a есть число $|a|$, равное a, если a неотрицательно, и равное $-a$, если a отрицательио, т. е.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Например: $|7| = 7$, $|-7| = 7$.

Абсолютная велнчина числа a есть число неотрицательное. Точнее, абсолютная величина числа a, отличного от нуля, есть число положительное, а абсолютная величина нуля есть нуль.

Если отметить на координатной осн (рис. 75) точки a и $-a$, то $|a|$ определяет расстояние от любой из этих точек до нулевой точки (на рисунке 75 a — положнтельное чнсло, $(-a)$ — отрицательное число).

Перечислнм основиые *свойства* абсолютных величин.

1. **Абсолютиая величина произведения двух чисел равна произведению абсолютных величин этих чисел:**

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

Например:

$$|7 \cdot 3| = 7 \cdot 3 = |7| \cdot |3|,$$
$$|(-7) \cdot 3| = |-7 \cdot 3| = 7 \cdot 3 = |-7| \cdot |3|,$$
$$|(-7) \cdot (-3)| = |7 \cdot 3| = 7 \cdot 3 = |-7| \cdot |-3|.$$

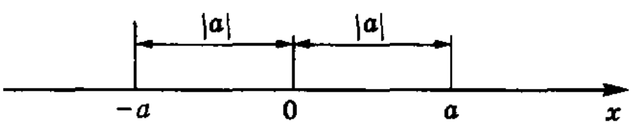


Рис. 75

2. Абсолютная величина частного двух чисел равна частному абсолютных величин этих чисел:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad (b \neq 0).$$

Например:

$$\left|\frac{7}{3}\right| = \frac{7}{3} = \frac{|7|}{|3|},$$

$$\left|\frac{-7}{3}\right| = \left|-\frac{7}{3}\right| = \frac{7}{3} = \frac{|-7|}{|3|},$$

$$\left|\frac{-7}{-3}\right| = \frac{7}{3} = \frac{|-7|}{|-3|}.$$

3. Абсолютная величина суммы двух чисел не больше суммы абсолютных величин этих чисел:

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

В самом деле, если a и b оба неотрицательны, то

$$a + b = +(|a| + |b|);$$

если же оба неположительны, то

$$a + b = -(|a| + |b|).$$

Но тогда

$$|a+b| = |+(|a| + |b|)| = |a| + |b|$$

$$|a+b| = |-(|a| + |b|)| = |a| + |b|.$$

Пусть теперь числа a и b разных знаков и для определенности $|a| \geqslant |b|$. Если a положительно, то

$$a + b = +(|a| - |b|),$$

и если a отрицательно, то

$$a + b = -(|a| - |b|).$$

Но тогда

$$|a+b| = |+(|a| - |b|)| = |a| - |b| \leqslant |a| + |b|$$

и

$$|a+b| = |-(|a| - |b|)| = |a| - |b| \leqslant |a| + |b|$$

потому, что

$$-|b| \leqslant |b|.$$

Итак, для любых действительных чисел a и b

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

4. Абсолютная величина разности двух чисел не больше суммы абсолютных величин этих чисел:

$$|a-b| \leqslant |a| + |b|.$$

Это свойство легко следует из свойства 3. Действительно,

$$|a-b| = |a + (-b)| \leqslant |a| + |-b| = |a| + |b|.$$

1057°. а) Что такое абсолютная величина числа?

б) Всегда ли абсолютиая величина числа есть положительиое число?

в) Что определяет на числовой оси абсолютная величииа координаты точки?

г) Каковы осиовиые свойства абсолютных велнчии чисел?

1058. Укажите абсолютную величииу числа:

а) 7; б) 0,35; в) 0; г) −1,3;

д) −13; е) 0,(5); ж) −0,(1); з) $-\pi$.

1059. Вычислите:

а) $|5-2|$ и $|2-5|$; б) $|7+4|$ и $|-7-4|$;

в) $|7-13|$; г) $|1{,}25-7{,}76|$;

д) $2-|5-2|$; е) $|7-10|-3$;

ж) $|-4|-|-1-3|$; з) $|-12-3|-|1-6|$.

1060°. а) Может лн число быть больше своей абсолютиой величины?

б) Может ли число быть меньше своей абсолютиой величины?

в) Как называются числа, одинаково удалениые от иачальной точки координатной оси?

1061. Отметьте иа координатной оси числа, абсолютная величина которых равиа: 1; 2; 0,5; 0.

1062. Отметьте на координатиой оси числа, удовлетворяющие условию: а) $|x|=4$; б) $|x|<1$; в) $|x|>3$.

1063. а) Пусть $a=b$. Верно ли утвержденне, что $|a|=|b|$?

б) Верно ли утверждеиие, что если $|a|=|b|$, то $a=b$?

в) Какой зиак неравенства следует поставить между числами a и $|a|$?

1064. Справедливо ли при любых действительных значениях a равенство:

а) $|a^2|=a^2$; б) $|a^3|=a^3$;

в) $|a^2+3|=a^2+3$; г) $|a+1|=a+1$?

1065. Упростите выражение при $x>0$; $x<0$:

а) $x+|x|$; б) $x-|x|$; в) $|x|\cdot x$; г) $\frac{x}{|x|}$.

1066. Запишите следующие выражения без знака абсолютной величииы, если известно, что $a<0$:

а) $|-a|$; б) $|a^2|$; в) $|a^3|$; г) $|a^2+5|$.

1067. Докажите, что при любом действительиом значении x верио равеиство:

а) $|x|=|-x|$; б) $|x^2+3|=|-x^2-3|$.

1068. Докажите, что если $x>0$ н $y<0$, то:

а) $|x|\cdot y<0$; б) $\frac{x}{|y|}>0$; в) $x+|y|>0$; г) $x\cdot y^2>0$.

1069. Отметьте на координатной оси промежутки:

а) $|x| < 2$; б) $|x| > 1$;

в) $|x| \leqslant 1{,}5$; г) $|x| \geqslant 0{,}2$.

1070. Докажите, что если $-a < x < a$, то $|x| < a$.

1071. Докажите, что:

а) $|a| - |b| \leqslant |a - b|$;

б) $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$.

1072. Покажите, что:

а) если $a < c < b$, то $|a - c| < b - a$ и $|b - c| < b - a$;

б) если $a \leqslant c < b$, то $|c - a| < |b - a|$ и $|b - c| \leqslant b - a$.

9.2. Абсолютная погрешность приближения

Мы уже знаем, что *если число* $\bar{a}$ (a с чертой) *мало отличается от числа* a*, то говорят, что* a *приближенно равно* $\bar{a}$*, и пишут:*

$$a \approx \bar{a}.$$

Говорят еще, что $\bar{a}$ есть приближение числа a. Напомним, что знак $\approx$ — это знак приближенного равенства.

Величину $|a - \bar{a}|$ называют **абсолютной погрешностью приближенного равенства** $a \approx \bar{a}$ **или приближения числа** a **при помощи числа** $\bar{a}$.

Другими словами, абсолютной погрешностью приближения числа a при помощи числа $\bar{a}$ называют абсолютную величину разности этих чисел.

Всякое число h, большее абсолютной погрешности приближения или равное ей:

$$h \geqslant |a - \bar{a}|,$$

называют **оценкой погрешности приближения** или, коротко, **погрешностью приближения** ($a \approx \bar{a}$).

Очевидно, абсолютная погрешность приближения есть наименьшая (самая малая) погрешность приближения.

Ясно, что если число h — погрешность приближения, то любое большее его число h_1 ($h_1 \geqslant h$) также есть погрешность приближения.

Абсолютную погрешность приближения важно знать. Однако на практике она далеко не всегда может быть известна. Поэтому обычно находят лишь погрешность приближения. При этом стараются, чтобы погрешность была записана в достаточно простой форме и чтобы она не была очень завышена.

Если число a удовлетворяет неравенствам

$$a_1 \leqslant a \leqslant a_2,$$

где a_1 и a_2 — приближение числа a ($a_1 \approx a$, $a_2 \approx a$), то говорят, что a_1 есть приближение с недостатком (снизу), а a_2 есть приближение с избытком (сверху) числа a с точностью до $a_2 - a_1$.

Пример 1. Имеет место приближенное равенство

$$17{,}32 \approx 17$$

с точностью до 1, потому что

$$|17{,}32 - 17| = 0{,}32 < 1.$$

В данном случае абсолютная погрешность равна 0,32, но в качестве погрешности мы сочли нужным взять число 1.

Например, если расстояние между двумя автобусными остановками 17,32 км, то во многих случаях мы сказали бы, что оно равно 17 км и нас бы поняли в том смысле, что 17 км есть приближенное значение расстояния между остановками с точностью до 1 км.

Пример 2. Имеет место приближенное равенство

$$879 \approx 900$$

с точностью до 50, потому что

$$|900 - 879| = 21 < 50.$$

В данном случае абсолютная погрешность приближения равна 21, но в качестве погрешности мы сочли нужным взять число 50. Например, при оплате железнодорожного проезда большие расстояния выражаются с точностью до 50 км.

Пример 3. При измерении температуры больного обнаружили, что уровень ртутного столба термометра находится между 38,3° и 38,4°. Пусть T — истинная температура больного. Тогда говорят, что T приближенно равна 38,3° с точностью до 0,1° с недостатком или T приближенно равна 38,4° с точностью до 0,1° с избытком, и пишут:

$$\begin{aligned} T &\approx 38{,}3^\circ, \\ T &\approx 38{,}4^\circ. \end{aligned} \tag{1}$$

Точное значение T нам неизвестно, абсолютная погрешность указанных приближений тоже неизвестна. Однако мы знаем, что $38{,}3^\circ < T < 38{,}4^\circ$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} |T - 38{,}3^\circ| &< 0{,}1^\circ, \\ |T - 38{,}4^\circ| &< 0{,}1^\circ. \end{aligned}$$

Поэтому приближения (1) имеют место с точностью до 0,1°.

Пример 4. Для числа

$$a = -13{,}23089107$$

имеют место неравенства

$$-13{,}231 < a < -13{,}230,$$

показывающие, что

$$a \approx -13{,}231 \text{ и } a \approx -13{,}230$$

с точностью до 0,001 соответственно с недостатком и избытком.

Числа можно приближать с округлением. Напомним процесс округления на примерах.

Примеры. Приблизим число a с точностью до второго знака после запятой с округлением и укажем погрешность приближения, если:
1) $a = 3{,}5629$; 2) $a = 3{,}56812$; 3) $a = 3{,}565$.

1) В силу неравенств

$$3{,}56 < 3{,}5629 < 3{,}57$$

в качестве приближения числа $a=3{,}5629$ с точностью до 0,01 можно взять как 3,56, так и 3,57. Но если мы возьмем среди них ближайшее к a число, то получим приближение с точностью до $\frac{1}{2} \cdot 0{,}01 = 0{,}005$. Так как у числа a третья цифра после запятой есть 2 и $2 < 5$, то ближайшее к a число есть 3,56.

2) Справедливы неравенства

$$3{,}56 < 3{,}56812 < 3{,}57.$$

При этом разность $3{,}57 - 3{,}56 = 0{,}01$. Но число $a = 3{,}56812$ имеет третью цифру после запятой 8, большую 5 ($8 > 5$). Следовательно, a ближе к 3,57, чем к 3,56. Выбирая в качестве приближения число 3,57, получим погрешность приближения, меньшую чем 0,005.

3) Верны неравенства

$$3{,}56 < 3{,}565 < 3{,}57.$$

Третья цифра после запятой у числа $a = 3{,}565$ есть 5, т. е. a находится посредине между числами 3,56 и 3,57. Мы берем в качестве приближения с округлением большее из них: 3,57. Так принято.

Ответ: 1) $3{,}5629 \approx 3{,}56$; 2) $3{,}56812 \approx 3{,}57$; 3) $3{,}565 \approx 3{,}57$. Погрешность в трех случаях не превышает $\frac{1}{2} \cdot 0{,}01 = 0{,}005$.

1073°. а) Что такое приближенное равенство?
б) Что такое погрешность и абсолютная погрешность приближения?
в) Каков знак приближенного равенства?
г) Что называют приближением с недостатком (снизу)?
д) Что называют приближением с избытком (сверху)?

1074. С какой точностью приближает число a_1 (a_2) число a, если $a_1 \leqslant a \leqslant a_2$?

1075. Как найти приближение числа с точностью до второго знака после запятой с округлением? Какова погрешность этого приближения?

1076°. а) Как читают выражение $a \approx a_1$?
б) Можно ли считать равенство $3 = 3$ приближенным равенством?

1077°. Какие из чисел можно считать точными, а какие приближенными значениями величин:
а) 7439 м — высоты пика Победы;
б) 16 см — ширина тетради;

в) 100 копеек есть один рубль;

г) 12° — температура воздуха?

1078. Укажите абсолютную погрешность приближения для следующих приближенных равенств:

а) $2{,}7 \approx 3$; б) $5{,}789 \approx 5{,}79$; в) $0{,}83 \approx 0{,}8$; г) $32 \approx 30$.

1079. Для следующих приближенных значений числа $\frac{3}{7}$ укажите абсолютную погрешность приближения:

а) 0,4; б) 0,5; в) 0,42; г) 0,43.

1080°. а) С какой точностью можно измерять длины с помощью обыкновенной линейки?

б) С какой точностью показывают время электронные наручные часы?

1081°. а) Можно ли считать приближение числа a с точностью до 0,01 приближением числа a с точностью до 0,1?

б) Можно ли приближение числа a с точностью до 0,01 считать приближением числа a с точностью до 0,001?

1082. Укажите на координатной оси положение всех чисел, соответствующих приближениям числа 2,185 с точностью до:

а) 1; б) 0,1; в) 0,01.

1083°. Какое приближение числа $\pi \approx 3{,}1415$ лучше: 3,14 или 3,15?

1084. Приблизьте числа: 1372,05; 0,000137208; $-1{,}3027$; $-17{,}002$ с округлением с точностью:

а) до одной цифры после запятой;

б) до двух цифр после запятой;

в) до трех цифр после запятой.

Укажите абсолютную погрешность приближения.

9.3. Относительная погрешность приближения

Относительной погрешностью приближенного равенства

$$a \approx \overline{a}$$

называют отношение его абсолютной погрешности к абсолютной величине числа a, т. е.

$$\frac{|a - \overline{a}|}{|a|}.$$

Например, если

$$a = 17{,}83, \quad \overline{a} = 18,$$

то получим приближенное равенство

$$17{,}83 \approx 18$$

с абсолютной погрешностью

$$|a - \overline{a}| = 0{,}17$$

и относительной погрешностью

$$\frac{|a-\bar{a}|}{|a|} = \frac{0,17}{17,83} < \frac{0,17}{17} = 0,01,$$

которая, как мы видим, оценивается сверху числом 0,01.

Если некоторое число превышает данное, то говорят, что оно оценивает данное число сверху или является оценкой сверху данного числа.

Если бы кто-нибудь измерил длину детали, имеющей истинную длину 10 см, и при этом допустил абсолютную погрешность, равную 1 см, то мы бы сказали, что это измерение плохое — приближение грубое. Между тем если при измерении длины комнаты, истинная длина которой 5 м, допустить ту же абсолютную погрешность 1 см, то мы бы сказали, что это измерение неплохое. Точность приближения, как правило, характеризуется не абсолютной погрешностью, а относительной. В примере с измерением детали относительная погрешность равна $\frac{1}{10}$, а в примере с комнатой относительная погрешность равна $\frac{1}{500}$. Чем меньше относительная погрешность приближения, тем более точным считается приближение.

В жизни нам часто приходится упрощать положительные числа, заменяя в целом числе некоторые его последние цифры нулями или заменяя нулями в десятичной дроби все цифры после запятой, начиная с некоторой. Если известно, что в городе 253 624 жителя, то обычно достаточно сказать, что в городе 253 000 или даже 250 000 жителей.

Мы упростим десятичную дробь 0,037123, если заменим в ней последние три цифры нулями, получим дробь 0,037.

При этом 253 000 является приближением числа 253 624 с точностью до третьей значащей цифры с недостатком; число 0,037 — приближением числа 0,037123 с точностью до второй значащей цифры с недостатком.

В том случае, когда желают получить более точное приближение числа, прибегают к округлению. Так, 254 000 есть приближение числа 253 624 с точностью до третьей значащей цифры с округлением. Число 0,037 есть приближение числа 0,037123 с точностью до второй значащей цифры с округлением.

Возникает вопрос об оценке относительной погрешности при подобных упрощениях, которые можно рассматривать как приближенные равенства.

Оценим относительную погрешность приближенных равенств

$$253\,624 \approx 253\,000, \tag{1}$$

$$0,037123 \approx 0,037. \tag{2}$$

При оценке относительных погрешностей удобно записывать числа в стандартном виде. Запишем все числа в приближенных равенствах (1) и (2) в стандартном виде:

$$2,53624 \cdot 10^5 \approx 2,53 \cdot 10^5, \qquad 3,7123 \cdot 10^{-2} \approx 3,7 \cdot 10^{-2}.$$

Здесь число $2{,}53 \cdot 10^5$ есть приближение числа $2{,}53624 \cdot 10^5$ с точностью до третьей значащей цифры с иедостатком, а число $3{,}7 \cdot 10^{-2}$ есть приближение числа $3{,}7123 \cdot 10^{-2}$ с точиостью до второй значащей цифры с недостатком.

Легко видеть, что справедливы неравенства

$$|2{,}53624 - 2{,}53| < 0{,}01,$$
$$|3{,}7123 - 3{,}7| < 0{,}1.$$

Теперь оценим относительиую погрешность приближеиных равеиств (1) и (2):

$$\frac{|253\,624 - 253\,000|}{253\,624} = \frac{|2{,}53624 - 2{,}53| \cdot 10^5}{2{,}53624 \cdot 10^5} < \frac{0{,}01}{2{,}53624} < 0{,}01,$$

$$\frac{|0{,}037123 - 0{,}037|}{0{,}037123} = \frac{|3{,}7123 - 3{,}7| \cdot 10^{-2}}{3{,}7123 \cdot 10^{-2}} < \frac{0{,}1}{3{,}7123} < 0{,}1.$$

Этн примеры подтверждают справедливость следующего правила: *Если заменить положительное число его приближением с точностью до k-й значащей цифры с недостатком, то относительная погрешность этого приближения не превышает* $10^{-(k-1)}$.

Теперь оцеиим относительную погрешность приближеиных равеиств

$$253\,624 \approx 254\,000, \tag{3}$$

$$0{,}037123 \approx 0{,}037. \tag{4}$$

В правых частях приближенных равенств (3) и (4) записаиы приближения чисел, стоящих в их левых частях, с округлением. Запишем все числа в равенствах (3) и (4) в стаидартном виде:

$$2{,}53624 \cdot 10^5 \approx 2{,}54 \cdot 10^5,$$
$$3{,}7123 \cdot 10^{-2} \approx 3{,}7 \cdot 10^{-2}.$$

В этих приближениых равеиствах число $2{,}54 \cdot 10^5$ есть приближение числа $2{,}53624 \cdot 10^5$ с точностью до третьей зиачащей цифры с округлением, а число $3{,}7 \cdot 10^{-2}$ есть приближеиие числа $3{,}7123 \cdot 10^{-2}$ с точностью до второй значащей цифры с округлеиием.

Легко видеть, что справедливы неравенства

$$|2{,}53624 - 2{,}54| < \frac{1}{2} \cdot 0{,}01,$$

$$|3{,}7123 - 3{,}7| < \frac{1}{2} \cdot 0{,}1.$$

Оценим относительную погрешность приближениых равеиств (3) и (4):

$$\frac{|253\,624 - 254\,000|}{253\,624} = \frac{|2{,}53624 - 2{,}54| \cdot 10^5}{2{,}53624 \cdot 10^5} < \frac{\frac{1}{2} \cdot 0{,}01}{2{,}53624} < \frac{1}{2} \cdot 0{,}01,$$

$$\frac{|0{,}037123 - 0{,}037|}{0{,}037123} = \frac{|3{,}7123 - 3{,}7| \cdot 10^{-2}}{3{,}7123 \cdot 10^{-2}} < \frac{\frac{1}{2} \cdot 0{,}1}{3{,}7123} < \frac{1}{2} \cdot 0{,}1.$$

Эти примеры подтверждают справедливость следующего правила:

Если заменить положительное число его приближением с точностью до k-й значащей цифры с округлением, то относительная погрешность этого приближения не превышает $\frac{1}{2} \cdot 10^{-(k-1)}$.

Отметим, что число 0,037 является приближением числа 0,037123 с точностью до второй значащей цифры как с недостатком, так и с округлением.

Пример 1. Приближение

$$0{,}012316 \approx 0{,}01231 \qquad (5)$$

произведено с точностью до четвертой значащей цифры с недостатком (без округления), его относительная погрешность оценивается так:

$$\frac{|1{,}2316 - 1{,}231| \cdot 10^{-2}}{1{,}2316 \cdot 10^{-2}} = \frac{0{,}0006}{1{,}2316} < 10^{-3}.$$

Относительная погрешность приближенного равенства (5) не превышает $10^{-(k-1)}$, где $k = 4$ — номер значащей цифры, с точностью до которой произведено приближение.

Если же в равенстве (5) взять приближение с округлением

$$0{,}012316 \approx 0{,}01232,$$

то его относительная погрешность оценивается так:

$$\frac{|1{,}2316 - 1{,}232| \cdot 10^{-2}}{1{,}2316 \cdot 10^{-2}} < \frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}}{1{,}2316} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$$

Пример 2. Оценим относительную погрешность приближения:

а) $32\,481 \approx 32\,400$; б) $32\,481 \approx 32\,500$;
в) $0{,}011756 \approx 0{,}01175$; г) $0{,}011756 \approx 0{,}01176$;
д) $9431 \approx 9400$.

Относительная погрешность приближенного равенства не превышает:
а) 10^{-2}; б) $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$; в) 10^{-3}; г) $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$; д) $\frac{1}{2} \cdot 10^{-1}$.

Приближение в случаях а) и б) произведено с точностью до третьей значащей цифры, в случае а) — с недостатком, в случае б) — с округлением; в случаях в) и г) — с точностью до четвертой значащей цифры, в случае в) — с недостатком, в случае г) — с округлением; в случае д) — с точностью до второй значащей цифры с округлением.

1085°. а) Что называют относительной погрешностью приближения?
б) Сформулируйте правило оценки относительной погрешности при упрощении записи числа.

1086. Для следующих приближенных равенств определите абсолютную и относительную погрешности:

а) $127 \approx 130$; б) $17 \approx 20$; в) $1{,}2 \approx 1$;
г) $0{,}12 \approx 0{,}1$; д) $0{,}185 \approx 0{,}19$; е) $1{,}00384 \approx 1{,}004$.

1087. Округлите следующие числа до одной цифры после запятой и определите абсолютную и относительную погрешности приближения:

а) 0,48; б) 1,324; в) 17,55;
г) −0,51; д) −1,287; е) −173,6051.

1088. Оцените относительную погрешность приближенного равенства:

а) $23\,392 \approx 23\,000$; б) $25{,}136 \approx 25$;
в) $0{,}324 \approx 0{,}3$; г) $0{,}000578 \approx 0{,}0006$.

1089. Упростите с округлением следующие числа, заменяя последние две цифры нулями:

а) 71 523; б) 0,568; в) 0,00328.

Оцените относительную погрешность полученных приближений.

1090. Округлите число до единиц и определите относительную погрешность приближения:

а) 17,89; б) 0,568; в) 0,98347.

1091. Упростите запись числа:

$a = 23\,807\,113$, $b = 10{,}002348$, $c = 0{,}00238072113$,

заменяя цифры, начиная с некоторого разряда, нулями так, чтобы полученные числа приближали a, b, c с относительной погрешностью, меньшей чем:

а) 0,001; б) $\frac{1}{2} \cdot 0{,}0001$.

ДОПОЛНЕНИЯ К ГЛАВЕ V

1. Абсолютная погрешность приближения суммы и разности двух чисел

Пусть даны числа a и b и пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — их приближения. Будем считать, что сумма $\bar{a} + \bar{b}$ и разность $\bar{a} - \bar{b}$ соответственно приближают сумму $a + b$ и разность $a - b$, т. е. будем рассматривать приближения

$$a + b \approx \bar{a} + \bar{b},\ a - b \approx \bar{a} - \bar{b}.$$

Т е о р е м а. *Абсолютная погрешность приближения суммы или разности двух чисел не превышает суммы абсолютных погрешностей приближений этих чисел.*

Доказательство. Так как абсолютная величина суммы двух чисел не больше суммы абсолютных величин этих чисел, то

$$\left|(a+b)-(\bar{a}+\bar{b})\right| = \left|(a-\bar{a})+(b-\bar{b})\right| \leq |a-\bar{a}| + |b-\bar{b}|.$$

В левой части этого неравенства стоит абсолютная погрешность суммы чисел a и b, а в правой — сумма абсолютных погрешностей приближений этих чисел.

Аналогично

$$\left|(a-b)-(\bar{a}-\bar{b})\right| = \left|(a-\bar{a})-(b-\bar{b})\right| \leq |a-\bar{a}| + |b-\bar{b}|.$$

Теперь в левой части неравенства стоит абсолютная погрешность приближения разности чисел a и b, а в правой — сумма абсолютных погрешностей приближений этих чисел, что и доказывает теорему.

Пример 1. Приближенное неравенство

$$3{,}47086 + (-2{,}3697) \approx 3{,}47 - 2{,}36 = 1{,}11$$

имеет место с точностью до $2 \cdot \frac{1}{100} = 0{,}02$, а приближенное равенство

$$3{,}47086 + (-2{,}3697) \approx 3{,}47 - 2{,}37 = 1{,}10$$

имеет место с точностью до $2 \cdot \frac{10^{-2}}{2} = 0{,}01$, потому что мы приближали слагаемые с округлением.

Пример 2. Приближенное равенство

$$-3{,}(01) + (-6{,}(724)) \approx -3{,}0101 + (-6{,}7247) = -9{,}7348$$

имеет место с точностью до $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}0001 = 0{,}0001$, потому что мы приближали слагаемые с округлением.

1092°. а) Как оценивают абсолютную погрешность суммы, разности двух чисел?

б) Если приближенно вычисляют сумму или разность двух чисел с точностью до 10^{-3}, то как надо упростить эти числа?

1093. Оцените точность приближенного равенства:

а) $123\,784{,}5 + 3897 \approx 124\,000 + 4000 = 128\,000$;

б) $0{,}784 + 0{,}385 \approx 0{,}7 + 0{,}3 = 1{,}0$;

в) $2{,}583012 + 7{,}00284 \approx 2{,}583 + 7{,}002 = 9{,}585$;

г) $0{,}5872 + 0{,}3895 \approx 0{,}59 + 0{,}39 = 0{,}98$.

1094. Найдите приближенно $a + b$ и $a - b$, приближая a и b до сотых с округлением. Определите точность приближения $a + b$ и $a - b$, если:

а) $a = 12{,}35817$, $b = 6{,}9879$;

б) $a = 7{,}1723$, $b = 0{,}8192$;

в) $a = 11{,}1429$, $b = 3{,}2872$;

г) $a = -3{,}12(27)$, $b = 1{,}22(891)$;

д) $a = 17{,}23(38)$, $b = -21{,}(136)$.

1095. Найдите с точностью до 0,01 сумму и разность чнсел:

а) $a = 3{,}1567$, $b = 2{,}0921$;

б) $a = 17{,}3281$, $b = -2{,}9856$;

в) $a = -7{,}0003$, $b = -2{,}9812$.

2. Абсолютная погрешность приближения суммы нескольких слагаемых

Теорема о погрешности приближения суммы двух слагаемых обобщается на любое конечное число слагаемых.

Теорема. *Абсолютная погрешность приближения суммы конечного числа слагаемых не превышает суммы абсолютных погрешностей этих слагаемых.*

Доказательство. Пусть имеются приближенные равенства

$$a \approx \bar{a},\ b \approx \bar{b},\ \ldots,\ \omega \approx \bar{\omega},$$

$$a + b + \ldots + \omega \approx \bar{a} + \bar{b} + \ldots + \bar{\omega}.$$

Тогда

$$|(a + b + \ldots + \omega) - (\bar{a} + \bar{b} + \ldots + \bar{\omega}| =$$

$$= |(a - \bar{a}) + (b - \bar{b}) + \ldots + (\omega - \bar{\omega})| \leqslant$$

$$\leqslant |a - \bar{a}| + |b - \bar{b}| + \ldots + |\omega - \bar{\omega}|.$$

В левой части этого неравенства записана абсолютная погрешность приближения суммы слагаемых a, b, ..., ω, а в правой — сумма абсолютных погрешностей приближений этих слагаемых, что и доказывает теорему.

Пример 1. Дана таблица приближений 20 чисел:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{20}.$$

Первые десять из этих прнближений: $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_{10}$ даны с точностью до третьего знака после запятой с округленнем. Последующие же десять приближений: $\bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{12}$, ..., $\bar{a}_{20}$ даны с точностью до второго знака после запятой тоже с округлением.

Найдем погрешность приближенного равенства

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{20} \approx \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_{20}. \qquad (1)$$

Для этого надо сложить погрешности приближенных равенств

$$a_1 \approx \bar{a}_1,\ \ldots,\ a_{10} \approx \bar{a}_{10},\ a_{11} \approx \bar{a}_{11},\ \ldots,\ a_{20} \approx \bar{a}_{20}.$$

Каждое из первых десяти приближений имеет погрешность $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = \frac{1}{2000}$, каждое из последних десяти приближений имеет погрешность $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = \frac{1}{200}$. Поэтому абсолютная погрешность приближенного равенства (1) не превышает числа

$$10 \cdot \frac{1}{2000} + 10 \cdot \frac{1}{200} = \frac{1}{200} + \frac{1}{20} = \frac{11}{200}.$$

Пример 2. Дано 20 чнсел (десятичных дробей):

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{20}.$$

Вычислим сумму этих чисел приближенно с точностью до 0,1.

Если чнсла задать с точностью до 10^{-k}, то сумма нх будет отличаться от истинной суммы не более чем на велнчину $h = 20 \cdot 10^{-k}$.

При $k = 1$ получаем, что $h = 2$.

Прн $k = 2$ получаем, что $h = 0{,}2$.

При $k = 3$ получаем, что $h = 0{,}02 < 0{,}1$.

Итак, заданные числа надо взять с тремя знаками после запятой. Если их сложить, то полученная сумма будет приближенно равна нстннной с точностью до 0,02, тем более с точностью до 0,1.

Однако если мы запишем прнближения наших чисел с округлением с двумя знаками после запятой, то этн числа прнближают соответствующие чнсла с точностью до $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$. Тогда их сумма будет приближенно равна истинной с погрешностью, равной

$$20 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 0{,}1.$$

Мы видим, что более экономно поставленную задачу можно решить, беря приближения чнсел с двумя знаками после запятой, но с округленнем.

1096°. а) Как оценивают абсолютиую погрешность приближения суммы нескольких слагаемых?

б) Если требуется найти приближеино 20 дробей с точностью до 0,1, то как лучше их упростить?

1097. У чисел 7,178219; 9,000017; 11,532478; 0,543712 оставьте три знака после запятой с округлением. Определите, с какой точностью сумма полученных таким округлением чисел приближает истинную сумму.

1098. Какие упрощения чисел: 0,378561; 2,235622; 3,789012; 4,251617 необходимо провести, чтобы их сумма была получена с точностью до 0,1? Выполните сложение даниых чнсел.

1099. Пол комнаты состоит из 17 досок, ширина каждой из которых 35 см с точностью до 0,5 см. Какую возможную ошибку мы сделаем, если будем считать, что шнрина комнаты (в направлении ширины досок) равна приближенио $35 \cdot 17$ см?

3. Приближение произведения

Рассмотрим приближеиные равеиства $a \approx \bar{a}$, $b \approx \bar{b}$.

Будем считать, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$ н что произведенне $\bar{a}\bar{b}$ прнближает произведение ab:

$$ab \approx \bar{a}\bar{b}. \qquad (1)$$

При оценке относительной погрешности произведения обычно пользуются следующим правилом:

Относительная погрешность приближения произведения чисел a и b не превышает суммы относительных погрешностей этих чисел:

$$\left|\frac{ab-\bar{a}\bar{b}}{ab}\right| < \left|\frac{a-\bar{a}}{a}\right| + \left|\frac{b-\bar{b}}{b}\right|. \qquad (2)$$

Замечание. Это правило не совсем точно, но оно широко применяется в практике вычислений, когда относительные погрешности приближений чисел a и b настолько малы, что можно пренебречь их произведением сравнительно с самими погрешностями.

В самом деле, так как

$$ab-\bar{a}\bar{b} = a(b-\bar{b}) + \bar{b}(a-\bar{a}) =$$
$$= a(b-\bar{b}) + b(a-\bar{a}) + (\bar{b}-b)(a-\bar{a}),$$

то абсолютная погрешность приближения (1) оценивается следующим образом:

$$|ab-\bar{a}\bar{b}| < |b||a-\bar{a}| + |a||b-\bar{b}| + |b-\bar{b}||a-\bar{a}|, \qquad (3)$$

потому что абсолютная величина суммы не превышает сумму абсолютных величин и абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин.

Разделив неравенство (3) на произведение $|a||b|$, которое по предположению не равно нулю, получим

$$\left|\frac{ab-\bar{a}\bar{b}}{ab}\right| < \left|\frac{a-\bar{a}}{a}\right| + \left|\frac{b-\bar{b}}{b}\right| + \left|\frac{a-\bar{a}}{a}\right| \cdot \left|\frac{b-\bar{b}}{b}\right|. \qquad (4)$$

Следовательно, относительная погрешность приближения произведения двух чисел a и b оценивается при помощи формулы (4).

Обычно приближения чисел выбирают так, что их относительные погрешности малы настолько, что их произведением можно пренебречь сравнительно с их суммой. Таким образом, в правой части неравенства (4) можно опустить третий член и мы получим неравенство (2).

Отметим, что при приближенном вычислении произведения чисел a и b относительные погрешности $\left|\frac{a-\bar{a}}{a}\right|$ и $\left|\frac{b-\bar{b}}{b}\right|$ надо стараться сделать равными.

Пример. Найдем приближенно произведение двух чисел

$$a = 3{,}7536 \text{ и } b = 12{,}289$$

с относительной погрешностью, меньшей, чем 0,02.

Если приблизить числа a и b с относительными погрешностями, не большими 0,005, то относительная погрешность приближения произведения не будет превышать 0,01. Имеем

$$a = 3{,}7536 \approx 3{,}75$$

с относительной погрешностью, не большей 0,005;

$$b = 1{,}2289 \cdot 10 \approx 12{,}3$$

с относительной погрешностью, не большей 0,005;

$$ab \approx 3{,}75 \cdot 12{,}3 = 46{,}125$$

с относительной погрешностью, не большей

$$0{,}005 + 0{,}005 = 0{,}01.$$

Округлим полученное число 46,125 с точностью до третьей значащей цифры: $46{,}125 \approx 46{,}1$ (с относительной погрешностью, не большей 0,005). Тогда

$$ab \approx 46{,}1 \tag{5}$$

с относительной погрешностью, не большей

$$0{,}01 + 0{,}005 < 0{,}02,$$

и абсолютной погрешностью, не большей

$$0{,}02 \cdot |ab| < 0{,}02 \cdot 4 \cdot 12{,}5 = 1,$$

так как $|a| < 4$, $|b| < 12{,}5$.

1100°. По какому правилу находят относительную погрешность приближения произведения чисел?

1101. Вычислите приближенно с относительной погрешностью, меньшей 0,001, произведение двух чисел:
а) 0,12345678... и 2,(7); б) 0,000(7) и 16,723561;
в) 1,(3) и 0,0001436; г) π и 1567,23.

1102. Вычислите приближенно с относительной погрешностью, меньшей $\frac{1}{500}$, произведение двух чисел:
а) 7,0(17) и 12,345678;
б) 0,013133133313... и 16,723561;
в) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$;
г) $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$.

4. Приближение частного

Пусть даны приближения чисел a и b, отличных от нуля:

$$a \approx \bar{a}, \ b \approx \bar{b}, \ \bar{b} \neq 0.$$

Рассмотрим приближение частного этих чисел:

$$\frac{a}{b} \approx \frac{\bar{a}}{\bar{b}}. \tag{1}$$

При оценке относительной погрешности приближения частного обычно пользуются следующим правилом:

Относительная погрешность приближения частного чисел a и b не превышает суммы относительных погрешностей приближений этих чисел:

$$\left|\frac{\frac{a}{b}-\frac{\bar{a}}{\bar{b}}}{\frac{a}{b}}\right| \leqslant \left|\frac{a-\bar{a}}{a}\right| + \left|\frac{b-\bar{b}}{b}\right|. \qquad (2)$$

Замечание. Это правило не совсем точно, но оно широко применяется в практике вычислений, когда число $\bar{b}$ настолько близко к числу b, что можно считать, что абсолютная величина их отношения не превышает $1\left(\left|\frac{b}{\bar{b}}\right| \leqslant 1\right)$.

В самом деле, так как

$$\frac{a}{b}-\frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{a\bar{b}-\bar{a}b}{b\bar{b}} = \frac{a\bar{b}-ab+ab-b\bar{a}}{b\bar{b}} = \frac{a(\bar{b}-b)}{b\bar{b}} + \frac{a-\bar{a}}{\bar{b}},$$

то абсолютная погрешность приближения (1) оценивается следующим образом:

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right| \leqslant \left|\frac{a}{b\bar{b}}\right| |\bar{b}-b| + \frac{1}{|\bar{b}|}|a-\bar{a}|.$$

Разделив это неравенство на число $\left|\frac{a}{b}\right|$, по условию не равное нулю, получим

$$\left|\frac{\frac{a}{b}-\frac{\bar{a}}{\bar{b}}}{\frac{a}{b}}\right| \leqslant \left(\left|\frac{a-\bar{a}}{a}\right| + \left|\frac{b-\bar{b}}{b}\right|\right)\left|\frac{b}{\bar{b}}\right|. \qquad (3)$$

Итак, относительная погрешность приближения (1) оценивается при помощи формулы (3).

Из этой формулы мы теперь получим более простую формулу (2), если $\bar{b}$ возьмем настолько близким к b, чтобы можно было считать, что имеет место неравенство

$$\left|\frac{b}{\bar{b}}\right| \leqslant 1.$$

Далее для оценки относительной погрешности мы будем пользоваться неравенством (2).

Отметим, что при приближенном вычислении частного чисел a и b надо стараться сделать равными относительные погрешности

$$\left|\frac{a-\bar{a}}{a}\right| \text{ и } \left|\frac{b-\bar{b}}{b}\right|.$$

Пример. Пусть $a = 12{,}345$, $b = 0{,}7876$. Вычислим приближенно частное $\frac{a}{b}$ с относительной погрешностью, не большей 0,02.

Так как $a = 1{,}2345 \cdot 10 \approx 1{,}23 \cdot 10$ с относительной погрешностью, не большей 0,005, и $b = 7{,}876 \cdot 10^{-1} \approx 7{,}88 \cdot 10^{-1}$ с относительной погрешностью, не большей 0,005, то

$$\frac{a}{b} \approx \frac{1{,}23 \cdot 10}{7{,}88 \cdot 10^{-1}} = 10^2 \cdot 0{,}15609... = 15{,}609... \qquad (4)$$

с относительной погрешностью, не большей $0{,}005 + 0{,}005 = 0{,}01$.

Округлив число в правой части равенства (4) с точностью до третьей значащей цифры, получим приближение

$$15{,}609 \approx 15{,}6$$

с относительной погрешностью, не большей 0,005. Эту погрешность тоже придется учесть. Окончательно получаем приближение

$$\frac{a}{b} \approx 15{,}6$$

с относительной погрешностью, не большей

$$0{,}01 + 0{,}005 < 0{,}02,$$

и с абсолютной погрешностью, не большей

$$0{,}02 \cdot \left|\frac{a}{b}\right| < 0{,}02 \cdot \frac{14}{0{,}7} = 0{,}4,$$

так как $|a| < 14$, $|b| > 0{,}7$.

1103°. По какому правилу находят относительную погрешность приближений частного чисел?

1104. Вычислите приближенно с относительной погрешностью, меньшей 0,01, частное двух чисел:

а) 0,12345678... и 2,(17); б) 12,3(4) и 0,0156;
в) 123,567 и 0,13(7); г) 4,(567) и 31,5(32).

1105. Вычислите приближенно с относительной погрешностью, меньшей $\frac{1}{500}$, частное двух чисел:

а) 7,9(17) и 1,234567...; б) 12,(45) и 0,012(4);
в) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$; г) $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$.

5. Приближенные вычисления с калькулятором

Практические вычисления, подобные рассмотренным выше, производят на электронных калькуляторах. Как это делать, подробно рассказывается в инструкции, которая прилагается к каждому калькулятору. Поэтому мы остановимся только на некоторых вопросах, связанных с приближенными вычислениями. Сами вычисления калькулятор производит моментально. Однако это не значит, что знания об абсолютных и относительных погрешностях не нужны тому, кто пользуется калькулятором. Они нужны, чтобы правильно поставить задачу, чтобы вычисления не были излишне громоздкими.

Кроме того, эти знания помогают правильно читать результаты, полученные с помощью калькулятора. Если на табло калькулятора, в который внесены приближенные значения чисел, получено число с восемью знаками, то они не всегда верные. Надо разобраться в том, какие из них заведомо верные и какие следует отбросить. В этом помогут знания об абсолютных и относительных погрешностях.

Отметим, что калькуляторы обычно дают результаты без округления.

В настоящее время выпускается довольно много различных моделей калькуляторов.

Мы будем далее говорить о конкретном калькуляторе «Электроника БЗ-38». Но факты, о которых будет идти речь, имеют место по аналогии и для других калькуляторов.

В калькулятор «Электроника БЗ-38» вводятся числа, каждое из которых состоит не более чем из восьми цифр.

Например, числа 13,757689; 0,00035; 0,0000001; −2,000002 калькулятор принимает.

Такие числа можно на калькуляторе складывать, вычитать, умножать, делить. На табло калькулятора результат выдается в виде числа, записанного не более чем восемью цифрами.

Если точный результат выражается не более чем восемью цифрами, то он и выдается на табло. В этом случае результат получен точно.

Если же точный результат выражается более чем восемью цифрами и его абсолютная величина меньше 10^8, то на табло появляется приближенное значение результата, состоящее из первых его восьми цифр.

Если же абсолютная величина результата будет больше чем 10^8, то приходится уже поступать иначе, применяя запись чисел в стандартном виде.

Например, воспользовавшись калькулятором, получаем

$$356 \times 781 = 278\,036, \tag{1}$$
$$23{,}1 \times 3{,}47 = 80{,}157, \tag{2}$$
$$35{,}272 \times 62{,}116 \approx 2190{,}9555, \tag{3}$$
$$0{,}00304 \times 85{,}123 \approx 0{,}2587739, \tag{4}$$
$$20{,}2 \times 187\,235 \approx 3\,782\,147, \tag{5}$$
$$23 : 2{,}1 \approx 10{,}952381. \tag{6}$$

В этих равенствах каждое из данных чисел состоит не более чем из восьми цифр. Такие числа калькулятор принимает.

Равенства (1) и (2) точные, потому что произведение двух чисел, каждое из которых состоит из трех цифр, само состоит не более чем из шести цифр. Такие числа калькулятор выдает точно.

Равенство (3) приближенное, верное с точностью до четвертого знака после запятой. Калькулятор вычислил произведение точно и отбросил (без округления!) лишние (сверх восьми) цифры:

$$35{,}272 \times 62{,}116 = 2190{,}955552 \approx 2190{,}9555.$$

Таким образом, этот приближенный результат получен с точностью до $0{,}0001 = 10^{-4}$, т. е. с абсолютной погрешностью, меньшей чем 10^{-4}.

Аналогично калькулятор вычислит результаты в случаях (4), (5) и (6).

В приведенных примерах считалось, что в калькулятор вводились точные числа. Однако на практике часто приходится вводить в калькулятор результаты измерения некоторых величин, т. е. их приближения. В этом случае результаты вычислений могут получиться с большими погрешностями, чем указывалось выше. Как обычно, мы будем считать, что результат измерения некоторой величины a (длины, площади, массы и т. д.) произведен с точностью до последнего знака этого числа.

Пример. Вычислим на калькуляторе произведение и частное чисел a и b, приближения которых 35,1 и 0,871, и упростим полученный результат с относительными погрешностями, не большими чем 0,021:

$$a \cdot b \approx 35{,}1 \cdot 0{,}871 = 30{,}5721 \approx 30{,}57,$$
$$a : b \approx 35{,}1 : 0{,}871 = 40{,}298507 \approx 40{,}30.$$

Пояснение. Имеем $a \approx 35{,}1$, $b \approx 0{,}871$ с относительными погрешностями, не большими 0,01. Далее, $ab \approx 30{,}5721$ с относительной погрешностью, не большей чем $0{,}01 + 0{,}01 = 0{,}02$, и $30{,}5721 \approx 30{,}57$ с относительной погрешностью, не большей чем 0,001. Окончательно $ab \approx 30{,}57$ с относительной погрешностью, не большей $0{,}02 + 0{,}001 = 0{,}021$.

При делении $a : b \approx 35{,}1 : 0{,}871$ имеем относительную погрешность, не большую чем 0,02.

Калькулятор выдал на табло число 40,298507 с относительной погрешностью, меньшей чем 0,02. Наконец, мы округлили число 40,298507 с относительной погрешностью, меньшей чем 10^{-3}.

В результате накопилась относительная погрешность, не большая чем $0{,}02 + 10^{-3} = 0{,}021$. Итак, если $a \approx 35{,}1$, $b \approx 0{,}871$, то $a : b \approx$ $\approx 40{,}30$ с относительной погрешностью, не большей 0,021.

6. Исторические сведения

Изучение математических рукописей Древнего Египта и Вавилона показывает, что еще в глубокой древности возникли некоторые приемы приближенных вычислений. Под влиянием развития астрономии, мореплавания и техники методы приближенных вычислений совершенствовались.

Большие заслуги в развитии теории приближенных вычислений имеет российский академик Алексей Николаевич Крылов (1863—1945), который писал: «Во всех справочниках, как русских, так и иностранных, рекомендуемые приемы численных вычислений могут служить образцом, как эти вычисления делать не надо... Вычисление должно производиться с той степенью точности, которая необходима для практики, причем всякая неверная цифра составляет ошибку, а всякая лишняя цифра — половину ошибки».

Чтобы в приближенных вычислениях можно было из самой записи приближенного числа судить о степени его точности, А. Н. Крылов предложил следующее правило: «Приближенное число следует записать так, чтобы все цифры, кроме последней, были бы надежными», т. е. верными.

А. Н. Крылов был не только видным математиком, но и выдающимся механиком-кораблестроителем, сделавшим ряд важнейших технических открытий.

7. Задания для повторения

1106°. Верно ли неравенство:
а) $2 \leqslant 3$; б) $5 \leqslant 5$; в) $0 < 2 < 5$; г) $0{,}4 \leqslant 0{,}4 \leqslant 5$?

1107°. Прочтите запись:
а) $7 < 12$; б) $-1 > -10$; в) $5 \leqslant 5$;
г) $2 < 3 < 4$; д) $3 \leqslant 3 < 4$; е) $-8 < 0 < 10$.

1108. Сравните:
а) 3 и 5; б) 2,546 и 2,545; в) -2 и -6;
г) 2,(3) и 2,3; д) $\frac{1}{4}$ и 0,25; е) 0,12(5) и $\frac{1}{8}$;
ж) $-\frac{1}{3}$ и $-0,(3)$; з) $-\frac{2}{3}$ и $-0{,}6$; и) $-\pi$ и $-3{,}14$;
к) $\sqrt{5}$ и 2,2; л) $-\sqrt{3}$ и 3^{-2}; м) -3^2 и 3^{-2}.

1109. Известно, что $a > b$. Получится ли верное неравенство, если обе части данного неравенства:
а) увеличить на 7; 8; б) уменьшить на 3; 2;
в) умножить на 5; -4; г) разделить на 2; -6?

1110. а) Запишите верное неравенство, полученное умножением неравенства $15 > 0$ на число 2; -3.
б) Запишите верное неравенство, полученное делением неравенства $-12 < -9$ на число 2; -3.

1111. Докажите, что если:
а) $a \neq 0$, то $a^2 > 0$; б) $a > b > 0$, то $a^2 > b^2$.

1112. Для чисел a и b найдите c, такое, чтобы $a < c < b$:
а) $a = 0$, $b = 0{,}0123(1)$; б) $a = 2{,}13(4)$, $b = 2{,}135$;
в) $a = -1$, $b = 0{,}172$; г) $a = -3{,}231$, $b = -1{,}17(35)$.

1113. Справедливо ли двойное неравенство:
а) $0{,}75757 < 0{,}75 < 0{,}75758$;
б) $3{,}023023 < 3,(023) < 3{,}023024$?

1114. Изобразите на числовой оси числа:
а) $\sqrt{2}$ и 1,4; б) 1,7 и $\sqrt{3}$;
в) $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}\sqrt{2}+1$; г) $\sqrt{11}$; 3,2; $\sqrt{13}$.

Вычислите (**1115—1117**):

1115. а) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{3})+8\sqrt{3}-4\sqrt{6}$;
б) $(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10})(\sqrt{2}+\sqrt{5})-2\sqrt{5}+\sqrt{10}-5\sqrt{2}$.

1116. а) $\dfrac{2^{-3}-\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}}{2^{-2}+\left(-\frac{1}{5}\right)^{0}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}}$; б) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\cdot 3^{-1}+(-1{,}51)^{0}}{16^{0}\cdot 2^{-2}}$.

1117. а) $2-\dfrac{1000}{1001}+\dfrac{999}{1001}-\dfrac{998}{1001}+\dfrac{997}{1001}-\dfrac{996}{1001}+\ldots+\dfrac{1}{1001}$;

б) $5-\dfrac{1002}{1003}+\dfrac{1001}{1003}-\dfrac{1000}{1003}+\dfrac{999}{1003}-\dfrac{998}{1003}+\ldots+\dfrac{35}{1003}$.

1118. Сумма трех чисел равна 254,772. Если в одном из чисел перенести запятую на две цифры вправо, то получится большее из чисел, а если перенести запятую в том же числе на одну цифру влево, то получится меньшее число. Найдите эти числа.

1119. Сумма трех чисел равна 3898,32. Если в одном из чисел перенести запятую на одну цифру вправо, то получится большее число, а если в этом же числе перенести запятую на одну цифру влево, то получится меньшее из чисел. Найдите эти числа.

1120*. Имеется 7 телефонов, и каждый из них должен быть соединен только с тремя другими. Можно ли это сделать?

1121. Могут ли три человека преодолеть расстояние 36 км не более чем за 6 ч, если скорость пешехода равна 5 км/ч, но у них имеется велосипед (рассчитанный только на одного человека), на котором можно передвигаться со скоростью 15 км/ч? Если ответ положителен, то укажите решение; если ответ отрицателен, то докажите невозможность решения.

1122. Запишите общую формулу чисел, которые при делении и на 3, и на 4 дают в остатке 1.

1123. Запишите общую формулу чисел, которые при делении и на 10, и на 7 дают в остатке 2.

1124*. Найдите условие, при котором сумма данного двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, представляет точный квадрат натурального числа.

1125*. Найдите условие, при котором разность между данным двузначным числом и числом, написанным теми же цифрами, но в обратном порядке, представляет точный квадрат натурального числа.

1126. Какой цифрой оканчивается произведение всех нечетных двузначных чисел?

1127. Сколькими нулями оканчивается произведение натуральных чисел от 1 до 20?

1128. Может ли сумма трех последовательных натуральных чисел быть простым числом?

1129. Докажите, что сумма двух последовательных четных чисел не делится на 4.

1130. Докажите, что разность трехзначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 9. Делится ли эта разность на 27?

1131. а) Докажите, что трехзначное число, записанное тремя одинаковыми цифрами, делится на 37.

б) Докажите, что четырехзначное число, записанное четырьмя одинаковыми цифрами, делится на 101.

1132. Докажите, что при любом целом значении k число $k^3 + 3k^2 + 2k$ делится на 6.

1133. Докажите, что если A — любое нечетное число, то число $A^2 - 1$ делится на 8.

1134. Докажите, что если в трехзначном числе две последние цифры одинаковы, а сумма его цифр делится на 7, то и само число делится на 7.

1135. Докажите, что если B — целое число, то число $B^2(B^2 - 1)$ делится на 4.

1136. Найдите наименьшее натуральное число, которое при умножении на 2 становится квадратом, а при умножении на 3 — кубом целого числа.

1137. Расшифруйте равенство ** + *** = ****, если каждое из слагаемых и сумма не изменяются при чтении их справа налево.

1138. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру перенести на первое место (на место сотен), то полученное число будет на 1 больше утроенного первоначального числа. Найдите это число.

1139. Какое наибольшее число одинаковых букетов можно составить из 264 белых и 192 красных тюльпанов?

1140. Сумма двух натуральных чисел больше 360, но меньше 400. Наибольший общий делитель этих чисел — 32. Найдите эти числа, если ни одно из них не является делителем другого.

1141. Найдите два целых числа, зная, что их сумма 168, а наибольший общий делитель 24.

1142. Докажите, что если $A + B + C = 0$, то $A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC$.

1143. а) Докажите, что если число при делении на 9 дает в остатке 3 или 6, то куб этого числа делится на 9. Делится ли куб этого числа на 27?

б) Докажите, что если число при делении на 9 дает в остатке 1, то и квадрат этого числа при делении на 9 дает в остатке 1.

1144. а) Докажите, что если k — натуральное число большее 4, то число $k^4 - 4k^3 - 4k^2 + 16k$ делится на 384.

б) Докажите, что если k — натуральное число большее 2, то число $k^5 - 5k^3 + 4k$ делится на 120.

1145. Участникам школьной математической викторины было предложено 30 вопросов. За каждый правильный ответ засчитывалось 7 очков, а за неправильный списывалось 12 очков. Сколько верных ответов дал участник викторины, если он набрал 77 очков?

1146. В чемпионате области по футболу участвует 30 команд. Сколько игр необходимо сыграть, чтобы каждая команда встретилась с каждой по одному разу?

1147. а) Докажите, что если $A < B$ и $C > K$, то $A - C < B - K$.

б) Докажите, что если положительные числа A, B, C, K удовлетворяют неравенствам $A < B$ и $C > K$, то они удовлетворяют и неравенству $\frac{A}{C} < \frac{B}{K}$.

1148. Докажите, что если:
а) $a > 0$ и $a = b$, то $a^k = b^k$ при любом натуральном k;
б) $a > b > 0$, то $a^k > b^k$ при любом натуральном k.
Сформулируйте и докажите утверждения, обратные утверждениям а) и б).

1149. На координатной оси изобразите множество чисел:
а) $|x| \leqslant 2$; б) $|x| > 1$; в) $|x| < 0,5$.

1150. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям:
а) $x = 1$, $2 < y \leqslant 3$; б) $1 < x < 4$, $y = 5$;
в) $|x| > 2$, $y < 5$; г) $|x| < 3$, $|y| < 2$.

1151. Какой отрезок симметричен относительно оси Ox отрезку, заданному условиями: $y = 2$, $1 \leqslant x \leqslant 2$?

1152. Разложите многочлен на множители:
а) $x^4 + 1$; б) $x^3 - 7x - 6$.

Решите уравнение (**1153—1155**):

1153. а) $|x| = 9$; б) $|x| = 1,5$; в) $|x - 1| = 2$;
г) $|x - 2| = 1$; д) $|x + 3| = 1$; е) $|x + 1| = 3$.

1154. а) $|2x - 1| = 5$; б) $|3x + 2| = 4$;
в) $|7 - 3x| = 4$; г) $|-2 - 3x| = 5$.

1155. а) $(x^2 + 2) \cdot |2x - 1| = 0$; б) $|x^4 + 1| = x^4 + x$;
в) $|x| = x + 2$; г) $|x| = 2x + 1$;
д) $|x - 3| = x$; е) $|x + 2| = 2x$.

1156. Может ли биквадратное уравнение иметь один корень; два корня; три корня? В каждом случае, если ответ положителен, приведите примеры.

1157. Найдите число x, удовлетворяющее равенству:
а) $\sqrt{x + 1} = 5$; б) $\sqrt{x + 3} = 1$;
в) $\sqrt{2x - 1} = 3$; г) $\sqrt{3x - 2} = 4$.

Пусть буквами x и a обозначены числа, при которых выражения имеют смысл. Упростите выражение (**1158—1159**):

1158. а) $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)}$;

б) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$.

1159. а) $(1-(1 - a^{-1}b)^{-1})^{-2} + (1-(1 - ab^{-1})^{-1})^{-2}$;

б) $(a + \sqrt{a^2 - 1})^{-1} + (a - \sqrt{a^2 - 1})^{-1}$.

1160. Докажите, что если $ABC = 1$, то

$$\frac{1}{1+A+AB} + \frac{1}{1+AC+C} + \frac{1}{1+B+BC} = 1.$$

1161. Решите уравиеиие:

а) $\frac{1}{x-x^{-1}}=1$; б) $\frac{1}{x+x^{-1}}=1$;

в) $\frac{2}{x^2+10x+25}-\frac{10}{25-x^2}=\frac{1}{x-5}$;

г) $\frac{1}{x^2-12x+36}+\frac{12}{36-x^2}=\frac{1}{x+6}$.

1162. Решите систему уравнеиий:

а) $\begin{cases}(x-5)(x+y)=-20,\\(y-8)(x+y)=-10;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x+3y-6)y-2x=0,\\(2x+y-12)y-2x=0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}(x+10)(y-12)=0,\\\frac{y^2-160}{y-2x}=0{,}2x;\end{cases}$ г) $\begin{cases}xy+5(x-y)=7,\\x^2+y^2+5(x-y)=10;\end{cases}$

д) $\begin{cases}x^2+y^2+x-y=44,\\\frac{y}{2}-\frac{2}{x}=1-\frac{y}{x};\end{cases}$ е) $\begin{cases}x+y=xy,\\xy=x^2+y^2;\end{cases}$

ж) $\begin{cases}2x^2-4xy+3y^2=36,\\3x^2-4xy+2y^2=36;\end{cases}$ з) $\begin{cases}2x^2-3xy+3y^2=128,\\3x^2-3xy+2y^2=128.\end{cases}$

1163. Постройте график функции:

а) $y=-|x|$; б) $y=|x-1|$; в) $y=|2x+1|$;

г) $y=x+|x|$; д) $y=x-|x|$; е) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$;

ж) $y=\frac{x^2-1}{x+1}$.

1164. Запишите числа в виде десятичиых дробей и расположите их в порядке возрастания: $\frac{20}{41}$, $\frac{15}{37}$, $\frac{5}{21}$, $\frac{17}{42}$.

1165. а) Запишите в порядке возрастания числа:
3,(007); −0,2303003000...; 3,(0008); 3,(009); −0,23(1); −0,231(07).

б) Запишите в порядке убывания числа:

−2,(05); −2,0(5); −0,00(1); −0,(001); $-2\frac{1}{20}$; −0,001.

1166. Округлите до третьего знака после запятой следующие числа:
а) 37,57891; б) 0,002576; в) −117,00992;
г) 0,3(9); д) −31,72(13); е) 0,00(08).

1167. Округлите число 87,5562 до сотых с иедостатком и с избытком. Определите абсолютную и относительиую погрешиости каждого приближеиия.

1168. Запишите в виде десятичиой дроби с точиостью до 0,01 числа:

а) $1\frac{2}{3}$; б) $2\frac{5}{6}$; в) $\frac{20}{41}$; г) $\frac{5}{7}$.

1169. Как можно записать, что:

а) приближенным значением числа a является число a_1 с точностью до 1;

б) приближенным значением числа a является число a_1 с точностью до h?

1170. а) Если $5,23 \leqslant a \leqslant 5,27$, то чему равны приближения снизу (с недостатком) и сверху (с избытком)?

б) Если $0,256 \leqslant a \leqslant 0,258$, то может ли a быть равным: 0,2574; 0,2579; 0,256; 0,258?

1171. Известно, что $0,25 \leqslant a \leqslant 0,27$. Приведите примеры возможных точных значений a.

1172. Вычислите приближенно с точностью до 0,1:

а) $0,385 + 3,7$;
б) $586,(5) + 3,7(8)$;
в) $0,38426 - 0,151892$;
г) $78,54289 - 3,78254$;
д) $2,875684 \cdot 0,3867$;
е) $2,333... \cdot 0,28567$;
ж) $78,56634 : 0,5048$;
з) $4,2534 : 1,38456$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ПО ПРОГРАММЕ 7—9 КЛАССОВ

1. 1) Вычислите $\left(5{,}25-4\frac{21}{40}\right):1{,}45-\left(7\frac{1}{3}-6{,}875\right):0{,}75$.

2) Упростите выражение $\left(\frac{x^2+4}{x^2-4x+4}+\frac{x-2}{2-x}\right):\frac{4}{x^2-4}$.

3) Постройте график функции $y=x-1$. Определите интервал, на котором функция принимает положительные значения.
4) Сумма двух чисел равна 2, а их произведение равно -35. Найдите эти числа.

2. 1) Вычислите $5\frac{1}{6}+\left(3{,}25+2\frac{1}{6}\right):2{,}6-\frac{2}{3}\cdot 2{,}25$.

2) Упростите выражение $\left(\frac{x^2+9}{x^2-6x+9}+\frac{x-3}{3-x}\right):\frac{9}{x^2-9}$.

3) Постройте график функции $y=-2x-2$. Определите интервал, на котором функция принимает отрицательные значения.
4) Произведение двух чисел равно 20, а их разность равна 1. Найдите эти числа.

3. 1) Вычислите $2:2{,}25\cdot\frac{9}{32}-\frac{30}{103}\cdot\left(\frac{2}{15}+1\frac{7}{12}\right)$.

2) Упростите выражение $\frac{x+2}{x+1}+\frac{x-2}{1-x}-\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

3) Постройте график функции $y=\frac{1}{3}x+1$. Определите, при каких значениях x функция принимает отрицательные значения.
4) Площадь прямоугольника равна 4 дм^2, а периметр 17 дм. Определите стороны прямоугольника.

4. 1) Вычислите $\left(4\frac{2}{3}:3{,}5+3{,}5:4\frac{2}{3}\right)\cdot 4{,}8$.

2) Упростите выражение $\frac{a^2-a}{9-a^2}-\frac{a-1}{a+3}+\frac{a-2}{a-3}$.

3) Постройте график функции $y=-0{,}5x+2$. Определите, при каких значениях x функция принимает положительные значения.

4) Одна сторона прямоугольника на 3 м короче другой. Определите стороны прямоугольника, если его площадь равна 1,75 м².

5. 1) Вычислите $\dfrac{12{,}8 \cdot 3\frac{3}{4} - 4\frac{4}{11} \cdot 4{,}125}{2\frac{4}{7} : \frac{3}{35}}$.

2) Упростите выражение $2m - \dfrac{m-4}{m^2+8m+16} : \dfrac{1}{16-m^2}$.

3) Решите систему уравнений графическим способом:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - y = 1. \end{cases}$$

4) Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 1, \\ x - y = 2. \end{cases}$

6. 1) Вычислите $\dfrac{28{,}8 : 13\frac{5}{7} + 6{,}6 \cdot 1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{80} : 1{,}35}$.

2) Упростите выражение $3x + \dfrac{2-x}{x^2+2x+1} : \dfrac{1}{1-x^2}$.

3) Решите систему уравнений графическим способом:

$$\begin{cases} x - y = 4, \\ 2x + y = 2. \end{cases}$$

4) Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 4, \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{y} = 1. \end{cases}$

7. 1) Вычислите $\dfrac{(0{,}29 - 1{,}09) \cdot 1{,}25}{\left(18{,}9 - 16\frac{13}{20}\right) \cdot \frac{8}{9}}$.

2) Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.

3) Решите систему уравнений графическим способом:

$$\begin{cases} x + 3y = 5, \\ 3x + y = -1. \end{cases}$$

4) Фрезеровщик должен изготовить к определенному сроку 80 деталей. Если он будет изготавливать за смену на одну деталь больше, чем предусмотрено планом, то закончит работу на 4 дня раньше срока. За сколько дней планировалось выполнить работу?

8. 1) Вычислите $\frac{(2,2+1,6):1,9}{(2,4-1,3):4,3}$.

2) Упростите выражение $\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$.

3) Решите систему уравнений графическим способом:

$$\begin{cases} 2x+y=1, \\ x-2y=8. \end{cases}$$

4) Скорость товарного поезда на 12 км/ч меньше скорости пассажирского поезда. Определите время, которое понадобится товарному поезду для прохождения участка длиной 52 км, если пассажирский поезд проходит такой участок быстрее товарного на 18 мин.

9. 1) Решите неравенство $3x^2 \leqslant 10x-3$.

2) Упростите выражение $\left(\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

3) Решите уравнение

$(x+2)(x-1)(x+1)-(x-2)(x-3)(x+3)+3x-49=0$.

4) Решите уравнение $\sqrt[3]{x^2}=\frac{1}{4}$.

10. 1) Постройте график функции $y=\frac{3}{x}$.

2) Решите уравнение $x^{0,3}=4$.

3) Упростите выражение $\left(\frac{6a+3}{a^2-18a}+\frac{6a-3}{a^2+18a}\right)\cdot\frac{a^2-324}{a^2+9}$.

4) Решите уравнение

$$(x^2+1)(x-2)-(x^2+3)(x-1)+7x-1=0.$$

11. 1) Два автомобиля выезжают из одного города в другой. Скорость первого на 10 км/ч больше скорости второго, поэтому он проезжает весь путь на 1 ч быстрее второго. Определите скорости автомобилей, если расстояние между городами равно 560 км.

2) Решите уравнение $\frac{x^2+2x+2}{4}-\frac{2x+1}{6}=\frac{3x^2+2x}{8}$.

3) Решите неравенство $4x^2+6x<9x^2-14x$.

4) Постройте график функции $y=-\frac{6}{x}$.

12. 1) Решите уравнение $\frac{2x^2+1}{3}-1=\frac{x^2-2x+16}{8}$.

2) Решите неравенство $\frac{2y-16}{y+7}<0$.

3) Решите уравнение $x^{-\frac{1}{5}} = 0$.

4) Сравните числа $(27)^{-\frac{1}{3}} - (0,36)^{-0,5}$ и $27^0 - (0,75)^{-1}$.

13. 1) Вычислите $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(-1\frac{1}{3}\right)^{-3} - (0,3)^{-3} \cdot (-0,3)^4 - \left(7\frac{8}{9}\right)^0 : \left(-1\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

2) Упростите выражение $\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{x^2+x}{4x}$.

3) Постройте график функции $y = x^2 - 3x + 1$.

4) Произведение двух целых чисел равно 30, а их сумма равна 11. Найдите эти числа.

14. 1) Вычислите $\frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{5}{12} : \left(2,5 \cdot \frac{1}{3} - 0,875\right)$.

2) Упростите выражение $\frac{a}{a^2-4} + \frac{a}{a+2} \cdot \left(\frac{a}{a^2-a} - \frac{1}{a-1}\right)$.

3) Постройте график функции $y = 2x - x^2$.

4) Сумма двух целых чисел равна 6, а их произведение равно -7. Найдите эти числа.

15. 1) Вычислите $27\sqrt{1\frac{2}{3}} - 3\sqrt{60} - 15\sqrt{0,6} + 18\sqrt{2\frac{7}{9}}$.

2) Упростите выражение $\dfrac{1}{\left(\frac{a+2}{a-2} + \frac{a-2}{a+2} - \frac{16}{a^2-4}\right) + 2}$.

3) Постройте график функции $y = 0,2x^2 - 3$.

4) Произведение двух чисел равно 3,5, а их разность равна 6,5. Найдите эти числа.

16. 1) Вычислите $\left(4\frac{5}{12} - 4\frac{4}{15}\right) \cdot 0,4 + 0,4$.

2) Упростите выражение

$$\frac{x}{x+3} + \frac{3x}{x-3} \cdot \left(\frac{3}{x^2-3x} - \frac{x-9}{9-x^2}\right).$$

3) Постройте график функции $y = -0,5x^2 + 1,5$.

4) Разность двух чисел равна $-9,7$, а их произведение равно $-12,3$. Найдите эти числа.

17. 1) Вычислите $\dfrac{2 \cdot 4^{-2} + \left(81^{-\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-3}}{125^{-\frac{1}{3}} \cdot (0,1)^{-2} + (0,5)^{-2}}$.

2) Постройте график функции $y = \frac{6}{x}$.

3) Десятый член арифметической прогрессии равен 17, а пятый член равен 4. Найдите сумму пятнадцати первых членов этой прогрессии.

4) Решите систему уравнений $\begin{cases} xy = -8, \\ x + 2y = 0. \end{cases}$

18. 1) Решите графическим способом уравнение

$$-\frac{12}{x} = 1 - x.$$

2) Двадцатый член арифметической прогрессии равен 20, а сумма первых двадцати членов равна 430. Найдите разность прогрессии.

3) Найдите область определения функции $y = \frac{1}{1+x}$.

4) Вычислите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

19. 1) Разность арифметической прогрессии равна 0,4, а сумма первых шести ее членов равна 30. Найдите десятый член прогрессии.

2) Упростите выражение $\left(\frac{x^{0,5}}{x^{0,5}-1} + \frac{1}{x^{0,5}+1} + \frac{2}{x-1}\right)(x - \sqrt{x})$.

3) Решите уравнение $|2x - 7| = 3$.

4) Найдите область определения функции $y = \sqrt{x^2 - 5x}$.

20. 1) Первый член арифметической прогрессии равен 1,5, а сумма первых двадцати членов равна 505. Найдите разность прогрессии. Есть ли среди членов прогрессии число 29?

2) Упростите выражение

$$c^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{c-1}{c^{\frac{1}{3}}-1} - 2c^{\frac{1}{3}}\right) : \left(c^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{1}{3}} + 1\right).$$

3) Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{(x-2)(x-3)}.$$

4) Вычислите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

21. 1) Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если $a_{11} + a_6 = 22$, $a_7 + a_5 = 16$.

2) Решите уравнение $(x^2 + 2x)^2 - 14(x^2 + 2x) - 15 = 0$.

3) Решите неравенство $\frac{x+2}{1-4x} < 2$.

4) Упростите выражение $\frac{\sin(0,5\pi + 2\alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} - \cos^2\alpha$.

22. 1) Расстояние между станциями *A* и *B* равно 240 км. Из *B* в *A* вышел поезд. Через 30 мин навстречу ему из *A* вышел поезд со скоростью, на 12 км/ч большей. Найдите скорость каждого поезда, если известно, что они встретились на середине пути.

2) Решите уравнение $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=3$.

3) Решите неравенство $\frac{3x+2}{2x+3} > 4$.

4) Упростите выражение $\frac{\cos(2\pi-2\alpha)}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1} - \sin^2\alpha$.

23. 1) Первый член арифметической прогрессии равен 10, разность равна 4. Найдите ее одиннадцатый член и сумму первых одиннадцати членов.

2) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 5(x+1)-9x-3 > -6(x+2), \\ 3(3+2x) < 7x-2(x-8). \end{cases}$$

3) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3(x-1) = 5(y+1), \\ \frac{7x-3y}{5} = \frac{5x-y}{3} - \frac{x+y}{2}. \end{cases}$$

4) Решите уравнение $3x^4 - 28x^2 + 9 = 0$.

24. 1) Найдите сумму шести первых членов геометрической прогрессии, если формула n-го ее члена $b_n = 4\cdot(0{,}5)^{n-1}$.

2) Решите неравенство $\frac{1+4y}{1-3y} < 1$.

3) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 2, \\ \frac{3}{x+y} + \frac{4}{x-y} = 7. \end{cases}$$

4) Сравните значения выражений $(0{,}7)^{-5}$ и $(0{,}7)^0$.

25. 1) Найдите сумму семи первых членов геометрической прогрессии, зная, что прогрессия возрастающая и $b_4 \cdot b_5 = 3b_8$, $b_1 + b_3 = 15$.

2) Решите уравнение $(x^2-3x)^2 + 3(x^2-3x) - 28 = 0$.

3) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{x-9}{4} - x \geqslant \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3}, \\ 2-x \leqslant 2x-8. \end{cases}$$

4) Найдите значение выражения

$$\frac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos\alpha - \sin(2\pi-\alpha)}, \text{ если } \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

26. 1) Двое рабочих, работая вместе, выполнили некоторую работу за 6 ч. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 5 ч быстрее, чем второй рабочий, работая отдельно. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу?

2) Решите уравнение $(x^2-6x)^2-6(x^2-6x)+9=81$.

3) Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{3}{x}-\frac{5}{y}=2, \\ \frac{7}{x}+\frac{10}{y}=9. \end{cases}$

4) Сравните значения выражений $8^{1,2}$ и $0,5^{-2}$.

27. 1) Найдите двузначное число, зная, что цифра его единиц на 2 больше цифры десятков и что произведение этого числа на сумму его цифр равно 144.

2) Решите графически уравнение $x^2-4x=-3x+6$.

3) Решите неравенство $\frac{(x-5)(x+7)}{x}<0$.

4) Найдите значение выражения

$$\frac{1+\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}{\cos\alpha-\cos(0,5\pi+\alpha)}, \text{ если } \cos\alpha=-\frac{1}{2}.$$

28. 1) Решите уравнение $\frac{x^2-7x}{5}+\frac{x-1}{3}=\frac{2x^2-5x-3}{30}$.

2) Решите неравенство $\frac{2x-3}{3x-7}<0$.

3) Решите уравнение $x^2+x^{-2}=2$.

4) Что больше: $(-1,2)^0-(0,25)^{-0,5}$ или $-2,4^0+(2,5)^{-1}$?

29. 1) Скорый поезд был задержан у семафора на 16 мин и нагнал опоздание на перегоне в 80 км, идя со скоростью, на 10 км/ч большей, чем полагается по расписанию. Какова скорость поезда по расписанию?

2) Решите уравнение $x^4-10x^3+9=0$.

3) Решите неравенство $0,01(1-3x)<0,02x+3,01$.

4) Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{x-2}+\sqrt{10-x}.$$

30. 1) Решите уравнение $x^4-13x^2+36=0$.

2) Решите неравенство $\frac{2x-1}{x}>0$.

3) *Найдите значение выражения* $(-0{,}75)^2 : \left(15\frac{5}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot (-9)^{-1}$.

4) Решите графическим способом уравнеиие $x - 1 = \frac{6}{x}$.

31. 1) Найдите значеиие выражения $(6{,}25)^{-0{,}5} \cdot (0{,}01)^{-1}$.

2) Укажите точки пересечеиия графика функцни $y = \sqrt{x}$ с осями координат.

3) Найдите область определеиия функции $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$.

4) Решите систему уравиений

$$\begin{cases} 3(x-1) = 5(y+1), \\ \frac{7x-3y}{5} = \frac{5x-y}{3} - \frac{x+y}{2}. \end{cases}$$

32[1]. 1) Найдите значеиие выражения

$$a^2 - 6\sqrt{5}a - 1 \text{ при } a = \sqrt{5} + 4.$$

2) Решите уравнение

$$\frac{1}{2-x} - 1 = \frac{1}{x-2} - \frac{6-x}{3x^2-12}.$$

3) На турбазе имеются палатки и домики; всего их 25. В каждом домике живут 4 человека, а в палатке 2 человека. Сколько иа турбазе палаток и сколько домиков, если иа турбазе отдыхают 70 человек?

4) С помощью графиков определите, сколько решеиий имеет система уравнений:

$$\begin{cases} y = x^3, \\ xy = 4. \end{cases}$$

33. 1) Решите уравнеине

$$\frac{2x+5}{x^2+x} - \frac{2}{x} - \frac{3x}{x+1} = 0.$$

2) Решите неравенство и укажнте, если возможио, одио значение x, удовлетворяющее неравеиству

$$\frac{1}{9}x^2 < 1.$$

3) В первом зрительиом зале 420 мест, а во втором 480. Во втором зале иа 5 рядов меньше, чем в первом, но в каждом ряду на 10 мест больше, чем в каждом ряду первого зала. Сколько мест в ряду в каждом из залов?

---

[1] Задания 32—37 содержат задачи из экзаменационных работ для 9 класса прошлых лет; звездочкой отмечены задания для классов с углубленным изучением математики.

4) Решите систему уравиенни

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 16, \\ x + y = -2. \end{cases}$$

34*. 1) Вычислите, используя, где возможно, формулы сокращенного умножения $\frac{0{,}12^3 - 0{,}28^3}{0{,}16} - 0{,}12 \cdot 0{,}28$.

2) В арифметической прогрессии $\frac{a_{133}}{a_5} = 17$. Найдите $\frac{a_{25}}{a_{47}}$.

3) Докажите тождество $\sqrt{\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}} = -\frac{2}{\cos\alpha}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

4) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{y+1} - \frac{3y-1}{x+1} = 2, \\ \frac{3y+3}{3x-1} + \frac{2x+2}{3y-1} = 1. \end{cases}$$

35*. 1) Выполните указанные действия:

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{32} - \frac{1}{3}\sqrt{3} + 4\sqrt{15}\right) \cdot \sqrt{12} - 4\sqrt{6} - 24\sqrt{5}.$$

2) Бак объемом 1 $м^3$ заполняется двумя насосами одновременно. Первый насос перекачивает за 1 ч иа 1 $м^3$ воды больше, чем второй. Найдите время, за которое каждый насос в отдельности может наполнить бак, если первому насосу нужно для этого на 5 мин меиьше, чем второму.

3) Вычислите $\cos\alpha$, если $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} - \alpha < \pi$.

4) Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x-y} + x + 1 = 0, \\ \frac{x}{x-y} + 2 = 0. \end{cases}$

36*. 1) Решите уравнение $|1 + 3x| - |x - 1| = 2 - x$.

2) Упростите выраженне $\frac{6x^2 + x - 7}{13x - 10x^2 - 3}$ и определите, какие значения оно может принимать.

3) В геометрической прогрессии первый член равен $\sqrt{2}$, а седьмой $\sqrt{128}$. Найдите восьмой член прогрессии.

4) Решите уравиеиие $\frac{6}{(x-1)(x+3)} - \frac{24}{(x-2)(x+4)} = 1$.

37*. 1) Пусть остаток от делення натурального числа n на 9 равен 5. Найдите остаток от делення на 9 числа $4n^2 + 7n + 2$.

2) В арнфметической прогресснн $\{a_n\}$ нмеем $a_1 = -85$, a_{19} — ее первый положнтельный член. Какие целые значення может принмать разность прогрессин?

3) Вычнслнте $\sin 10° \, (0{,}5 + \sin 70°)$.

4) Два брокера купилн акции одного достонства на сумму 3375 р. Когда цена на этн акцнн возросла, они продалн часть акцнй на сумму 2916 р. Первый брокер продал 60% своих акций, а второй — 70%. Прн этом сумма от продажи акций, полученная первым брокером, в $1\frac{2}{7}$ раза превысила сумму, полученную вторым брокером. На сколько процентов возросла цена одной акции?

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОТВЕТЫ

4. а) $(1; +\infty)$; б) $(-\infty;\ 0)$; в) $(-1; 3)$. **8.** а) Нет; б) нет; в) да; -4; г) да; 0. **14.** а) $\left(-\infty;\ 1782\dfrac{2}{3}\right)$; б) $(-\infty; 198{,}8)$; в) $\left(1\dfrac{11}{14}; +\infty\right)$; г) $(-\infty; 0{,}9)$. **15.** а) $\left(5\dfrac{14}{15}; +\infty\right)$; б) $(0; +\infty)$; в) $(-\infty; 27{,}55)$. **16.** а) $(2; +\infty)$; б) $(-\infty; -2)$; в) $(-20; +\infty)$. **23.** а) $(2; +\infty)$; б) $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right)$; в) $\left(-\infty; -\dfrac{4}{7}\right)$; г) $(-0{,}75; +\infty)$. **25.** а) $\left(-\infty;\ 6666\dfrac{2}{3}\right)$; б) $(-0{,}000025; +\infty)$. **28.** а) $y > 0$ при $x \in (-1; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (-\infty; -1)$. **34.** а) $(-\infty; 1)$; б) $(-1; +\infty)$; в) $(-\infty; -1)$; г) $(-\infty; -6{,}5)$. **35.** а) $(-\infty; 3)$; б) $\left(2\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; -0{,}5)$; г) $\left(-\infty; -\dfrac{4}{11}\right)$. **36.** а) $(-\infty; +\infty)$; г) нет решений. **37.** в) Нет решений; г) $(-\infty; +\infty)$. **38.** а) $(-\infty; 24)$; б) $(-\infty; 6)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(5; +\infty)$; д) $(-1; +\infty)$; е) $(-\infty; +\infty)$. **41.** а) Нет решений; б) $\left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$. **42.** а) $(-\infty; -3)$; б) $(2{,}5; +\infty)$; в) $(-\infty; 0{,}5)$; г) нет решений. **44.** в) $(-\infty; -2{,}4)$; г) $(8; +\infty)$; д) $(5{,}25; +\infty)$; е) $\left(3\dfrac{1}{6}; +\infty\right)$; ж) $\left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$; з) нет решений. **45.** а) Нет; б) нет. **46.** а) Да; б) да. **53.** а) Да; б) нет; в) да; г) да. **55.** в) $(1; +\infty)$; г) $(-\infty; 0{,}5)$; ж) нет решений; з) $(-\infty; -1)$. **56.** а) $\left(-\dfrac{4}{3}; -\dfrac{9}{20}\right)$; б) $(12; +\infty)$; в) $(-\infty; 3)$; г) нет решений. **62.** а) $\left(0; \dfrac{2}{3}\right)$; б) $(-3{,}5; 28)$; в) $(-3; -2)$; г) $(-1; 4)$; д) $\left(\dfrac{7}{3}; \dfrac{10}{3}\right)$; е) $(-18; -10)$. **66.** а) 9; б) 1; в) 29; г) 21. **67.** а) Да; б) нет. **68.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **78.** а) $\left(-\dfrac{5}{3}; \dfrac{1}{2}\right)$; б) $\left(\dfrac{1}{7}; \dfrac{5}{12}\right)$; в) $\left(-\infty; -\dfrac{3}{4}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{5}; +\infty\right)$; г) $\left(-\infty; -\dfrac{40}{7}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{16}; +\infty\right)$. **79.** д) $\left(-\infty; -\dfrac{7}{4}\right) \cup$ $\cup (0; +\infty)$; е) $(-\infty; 0) \cup \left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$. **81.** а) $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$; б) $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$; в) $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup$ $\cup (\sqrt{2}; +\infty)$; г) $(-\sqrt{13}; \sqrt{13})$. **82.** а) $(0; 2)$; б) $\left(-\infty; -\dfrac{8\sqrt{35}}{35}\right) \cup \left(\dfrac{8\sqrt{35}}{35}; +\infty\right)$. **85.** а) $(-\infty; 4) \cup$ $\cup (12; +\infty)$; б) $(-12; -4)$; в) $(4; 12)$; г) $(-\infty; -12) \cup (-4; +\infty)$; д) $\left(\dfrac{1-\sqrt{141}}{10}; \dfrac{1+\sqrt{141}}{10}\right)$; е) $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$; ж) $\left(-\infty; \dfrac{17-\sqrt{249}}{4}\right) \cup \left(\dfrac{17+\sqrt{249}}{4}; +\infty\right)$; з) $\left(\dfrac{-15-\sqrt{177}}{8}; \dfrac{-15+\sqrt{177}}{8}\right)$. **90.** а) $x \neq 0$; б) $x \neq 0$; в) $x \neq -3$; г) $x \neq 1$. **96.** а) Нет решений; б) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; в) $\left(-\infty; -\dfrac{1}{7}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{7}; +\infty\right)$; г) нет решений; д) $\left(-\infty; -\dfrac{3}{4}\right) \cup \left(-\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$; е) нет решений. 97. а) При $k = 144$; б) при $k = 48$. 98. а) -4; б) x — любое действительное число.

102. а) $(-\infty; +\infty)$; б) нет решений; в) $(-\infty; +\infty)$; г) нет решений. **105.** а) При $m > \frac{1}{8}$; б) при $m > \frac{1}{3}$. **111.** а) $(-\infty; 0)\cup(2; +\infty)$; в) $(-\infty; 0)\cup(3,5; +\infty)$; д) $\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$; е) нет решений; ж) $(-\sqrt{1,5}; \sqrt{1,5})$; з) $(-\infty; +\infty)$. **112.** а) $\left(-\infty; \frac{5-\sqrt{145}}{20}\right)\cup \left(\frac{5+\sqrt{145}}{20}; +\infty\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{2-\sqrt{13}}{6}\right)\cup\left(\frac{2+\sqrt{13}}{6}; +\infty\right)$; в) $\left(-\infty; \frac{23-\sqrt{241}}{18}\right)\cup \left(\frac{23+\sqrt{241}}{18}; +\infty\right)$; г) $\left(-\infty; \frac{25-\sqrt{793}}{14}\right)\cup\left(\frac{25+\sqrt{703}}{14}; +\infty\right)$. **113.** а) $(-\infty; 0)\cup(0,8; +\infty)$; б) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; в) $(1; 2)$; г) $(-\infty; -3)\cup(2; +\infty)$. **114.** а) $(-\infty; 3)\cup(3; +\infty)$; б) нет решений; в) нет решений; г) $\left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{69}}{5}\right)\cup\left(\frac{-3+\sqrt{69}}{5}; +\infty\right)$; д) $\left(\frac{-1-\sqrt{11}}{2}; \frac{-1+\sqrt{11}}{2}\right)$; е) $(-\infty; +\infty)$. **127.** а) $(1; 3)\cup(5; +\infty)$; б) $(-\infty; 1)\cup(2; 4)$; в) $(-1; 1)\cup(2; +\infty)$; г) $(-\infty; -2)\cup(-1; 3)$. **128.** а) $(-\infty; -1)\cup(1; 0)$; б) $(-\infty; -5)\cup(-4; 0)\cup(2; +\infty)$; в) $(-\infty; -4)\cup(0; 2)$; г) $(-\infty; -1)\cup(0; 3)\cup(8; +\infty)$. **129.** а) $(-3; 2)\cup(7; +\infty)$; в) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$. **130.** в) $(-4; -1)\cup(3; 4)$; г) $(-\infty; -5)\cup(-1; 3)\cup(6; +\infty)$. **131.** а) $(-4; -2)\cup(-1; 2)\cup(4; +\infty)$; б) $(-\infty; -4)\cup(-3; 1)\cup(1; 3)$. **132.** а) $(1; 2)\cup(2; +\infty)$; б) $(-\infty; -4)$. **133.** д) $(-\infty; 1)\cup(1; 3)$; е) $(-\infty; 2)\cup(2; 3)$. **137.** а) $(-\infty; 1)\cup(2; +\infty)$; б) $(-3; 5)$. **140.** а) $(-2; 1)\cup(3; +\infty)$; б) $(-\infty; -3)\cup(-1; 2)$. **141.** а) $(-1; 0)\cup\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; б) $(0; 2)\cup(3; +\infty)$; в) $(0; 4)\cup(4; 6,5)$; г) $(-\infty; 0)\cup(0; 3)\cup(4; +\infty)$. **142.** а) $(-4; -1)\cup(1; +\infty)$; в) $(-\infty; 1)$; г) $(-7; 3)\cup(3; +\infty)$. **143.** а) $(-\infty; -3)\cup(-1; 2)\cup(3; +\infty)$; б) $(-\infty; -4)\cup(-1; 4)\cup(6; +\infty)$; в) $(-\infty; -2)\cup(2; 6)$; г) $(-0,2; 0,2)\cup(0,2; 5)$. **144.** а) $(1; 6)$; б) $(-\infty; -7)\cup(3; +\infty)$. **145.** а) $(0; 1)$; б) $(-\infty; 0)\cup(1; +\infty)$. **146.** а) $(0; 1)$; б) $\left(-\infty; -\frac{3}{\sqrt{5}}\right)\cup\left(0; \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$; в) $(0; 1)$; г) $(-\infty; -\sqrt{6})\cup(0; \sqrt{6})\cup(3; +\infty)$. **147.** а) $(3-\sqrt{5}; 1)\cup(3+\sqrt{5}; +\infty)$; б) $(-\infty; -3-\sqrt{3})\cup(-2; -3+\sqrt{3})$; в) $(-\sqrt{5}; -0,5)\cup(2; \sqrt{5})$; г) $\left(-\sqrt{3}; \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right)\cup\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}; \sqrt{3}\right)$. **148.** а) $(2; 3)\cup(3; +\infty)$; б) $(-\infty; -3)$; в) $(-\infty; 1)\cup(2; 3)\cup(3; +\infty)$; г) $(-\infty; -3)\cup(-1; 2)$. **152.** а) $(-1; 1)$; б) нет решений; в) $(-6; -2)\cup(-1; 3)$; г) $(-3; 4)$. **155.** а) $(-\infty; -1)\cup(5; 10)\cup(10; +\infty)$; б) $(-3; -2)$; в) $(-\infty; 0)\cup(0; 1)\cup(3; 7)\cup(7; +\infty)$; г) $(-3; -1)\cup(1; +\infty)$. **158.** а) $(0; 1)\cup(2; +\infty)$; б) $(-4; -1)$; в) $(-3; -1)\cup(1; +\infty)$; г) $(-5; -4)\cup(4; 5)$. **169.** а) $(-\infty; 1,5]$; б) $[0,75; +\infty)$; в) $[3,5; +\infty)$; г) $[-1,5; +\infty)$. **101.** а) $[4; 8]$; б) $[-6; -2]$; в) $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{57}}{4}\right]\cup\left[\frac{-1+\sqrt{57}}{4}; +\infty\right)$; г) $\left[\frac{5-\sqrt{37}}{6}; \frac{5+\sqrt{37}}{6}\right]$. **162.** а) 1; б) $(-\infty; +\infty)$; в) -3; г) $(-\infty; +\infty)$. **163.** а) $(-\infty; +\infty)$; б) $[-5; -2]$; в) нет решений; г) $(-\infty; +\infty)$. **164.** а) $[-3; -1]\cup[1; +\infty)$; б) $(-\infty; -4]\cup[4; 7]$; в) $(-\infty; 2,4]$; г) $(-\infty; 2]\cup\{3\}$. **166.** а) $(-\infty; -3)\cup[1; 3)\cup(3; +\infty)$; б) $(-5; 2]$; в) $(-\infty; 3)$; г) $(-\infty; 0)\cup(1; +\infty)$. **167.** а) $[-1; 1]\cup[2; 3]$; в) $[2; 3]$. **168.** а) $[-3; 2)\cup(-1; 1)$; б) $(-2; 1)\cup[2; +\infty)$; в) нет решений; г) $(1; 4)\cup(4; +\infty)$. **169.** а) $(-2; 2)$; б) $[-5; -4)$; в) $(-0,5; 1)\cup\{2\}$; г) $\left(\frac{2}{3}; 1\right)\cup\{3\}$; д) $\{-2; 3\}$; е) $\{-5\}\cup[-2; -1]$. **177.** а) 5; 5; 5; б) 30,3; 30,03; 30,0003.

189. а) C; б) $x + C$; в) $\frac{x^2}{2} + C$; г) $\frac{ax^2}{2} + bx + C$. **191.** а) $2x + C$; б) $\frac{3x^2}{2} - 2x + C$. **192.** а) $s(t) = 3t$; б) $s(t) = t^2$; в) $s(t) = t^2 + t$. **212.** а) $v_1 = \frac{a+b}{2}$ км/ч; б) $v_2 = \frac{2ab}{a+b}$ км/ч. **213.** В безветренную погоду. **217.** 5 м, 6 м, 9 м; 6 м, 6 м, 8 м; 6 м, 7 м, 7 м. **220.** в) $[1; +\infty)$; г) $\left[\frac{5}{7}; +\infty\right)$. **221.** б) $(-\infty; -6) \cup \left(-6; \frac{3}{7}\right) \cup \left(\frac{3}{7}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{4}{3}\right]$; г) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 5\right]$. **222.** а) Нет решений, если $a = 0$; $x \in (0; +\infty)$, если $a > 0$; $x \in (-\infty; 0)$, если $a < 0$. **230.** а) $t \in (-\infty; 9)$; б) $t \in (-\infty; -3) \cup (-3; 0{,}2)$. **242.** а) $(-5; -1) \cup (3; +\infty)$; б) $(-1; 3)$; в) $(-6; -1{,}5) \cup (1; 6)$; г) $(-\infty; 1)$. 243. $m \in \left(\frac{6-4\sqrt{3}}{3}; 2\right) \cup \left(2; \frac{6+4\sqrt{3}}{3}\right)$. 247. а) 2,5; б) $1\frac{7}{8}$. **251.** а) 2; б) $4m^2$. **252.** а) $\frac{x^4 - y^4}{x^2y^2}$; б) $2(x^2 + y^2)$. **253.** а) 0; б) $\frac{x}{x-y}$. **254.** а) $\frac{1-k}{1+k}$; б) $\frac{m+n}{m-n}$. **256.** а) 2; 4; б) 1; в) 1; г) 1. **258.** а) -3; 0; б) -3; -2; в) 0,5; г) 0,2. **259.** а) 7; б) -12; -10. **260.** а) 0; $-5\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}$; б) 5; 2,5. **261.** а) $\left(\frac{13}{8}; \frac{1}{4}\right)$; б) $\left(-\frac{51}{7}; -\frac{48}{7}\right)$; в) $(-2; 4)$; г) $(1{,}5; 2{,}5)$. **262.** а) $(2; 0)$; $(-1; 3)$; б) $\left(\frac{9-\sqrt{33}}{2}; \frac{1+\sqrt{33}}{2}\right)$; $\left(\frac{9+\sqrt{33}}{2}; \frac{1-\sqrt{33}}{2}\right)$. **263.** а) $(1; 2)$; $(2; 1)$; б) $(1; 1)$. **264.** а) $\left(-22; -\frac{11}{3}\right)$; б) $(-8; -7)$. **265.** а) $(2; 3)$; $(3; 2)$; $(1; 5)$; $(5; 1)$; б) $(0; 2)$; $(2; 0)$. **268.** 5 ч. **269.** 45 и 30 дней; 24 и 72 дня. **270.** Вторая, в 1,5 раза. **271.** 46 км/ч. **272.** 4 км/ч. **273.** 25. **274.** 50 км/ч. **275.** 27 и 40 Ом. **276.** $22\frac{2}{9}$ градуса. **277.** 41 типа A и 56 типа B. **278.** 4, 7, 9, 11. **279.** 36, 41, 53 и 58 см. **280.** 10 и 15 м/с. **281.** 6. **282.** 40 дней, на 125%. **283.** 10 га, 12 дней. **284.** 24 см^3. **285.** 50 км/ч. **286.** а) $s = 800t - \frac{gt^2}{2}$; б) $s = -800t + \frac{gt^2}{2}$. **289.** а) 0,5 м/с; б) 10,5 м/с; в) 20,5 м/с; г) 30,5 м/с. **291.** 4 с (2 с вверх и 2 с вниз); 20 м. **292.** а) Через 3 с; б) через 5 с. **293.** 40,6 м. **294.** 20,4 с и 159,6 с. **295.** Указание. Считайте, что в любом достаточно большом количестве мужчин, например среди всех отцов, Иванов больше, чем Петров, в одно и то же число раз. **302.** а) Нет; б) да; в) да; г) да. **311.** а) Нет; б) да; в) да; г) нет. **319.** а) Да; б) нет. **320.** а) Да; б) да. **323.** а) $x > x^5$; б) $x < x^5$; в) $x < x^5$; г) $x > x^5$. **324.** а) $x^4 < x^6$; б) $x^4 < x^6$; в) $x^4 > x^6$; г) $x^4 > x^6$. **340.** а) Да; б) нет; в) да. **353.** а) Да; б) нет; в) нет; г) нет. **355.** д) 2; е) 3; ж) $-0{,}6$; з) -5. **358.** а) 2; б) 5; в) 2; г) 1; д) -3; е) $\sqrt[5]{2}$. **362.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да. **367.** а) 6; б) 5; в) 1; г) 6; д) 0. **368.** а) -1; 1; б) нет корней; в) 0; г) -3; 3. **374.** а) Нет; б) нет; в) да; г) нет. **376.** а) 8; б) 4; г) 0,7; д) $\frac{2}{15}$. **377.** д) 2; е) 2; ж) 5; з) 6. **378.** а) 12; б) 5; в) 0,9; г) 10. **380.** а) 6; б) 0. **381.** а) $2\sqrt[3]{5}$; б) $-2\sqrt[3]{2}$. **386.** а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{5}{3}$. **389.** а) $2 > \sqrt[3]{7}$; б) $\sqrt[4]{12} < 2$. **390.** а) $1 < \sqrt[3]{3} < 2$. **391.** а) 8; б) 16; в) 1; г) 1. **392.** в) $\sqrt{2} - 1$; г) $2 - \sqrt{2}$; д) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; е) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$. **393.** в) $97\sqrt[3]{\frac{1}{12}}$. **397.** а) $k \leq 1$; б) $k \leq -1$. **401.** ж) 7; з) 5. **403.** е) $2cd\sqrt[4]{cd^2}$; ж) $-x\sqrt[4]{5}$. **405.** в) $\sqrt[11]{abc}$; г) $a\sqrt[3]{x}$. **414.** а) $\sqrt[4]{12}$;

б) $\sqrt[6]{18}$; в) $\sqrt[9]{24}$; г) $\sqrt[8]{128}$. **418.** а) $\sqrt[9]{a}$; б) $\sqrt[12]{b}$; в) $\sqrt[6]{y^5}$; г) $\sqrt[3]{x^2}$. **419.** в) $\sqrt[8]{x^7}$; г) $\sqrt[27]{a^9b^3c}$. **420.** а) 3; б) 2; в) $\frac{81}{16}$; г) 10 000. **433.** а) $\sqrt[3]{3} \approx 1{,}4$; б) $\sqrt[3]{6} \approx 1{,}8$. **434.** а) $\sqrt[3]{175} \approx 6$; б) $\sqrt[3]{241} \approx 6$. **437.** а) $\sqrt[3]{3} \approx 1{,}442$. **447.** а) $m < n$; б) $m > n$; в) $m > n$; г) $m < n$. **448.** а) $a > 1$; б) $0 < a < 1$; в) $0 < a < 1$; г) $a > 1$. **458.** а) $\frac{343}{20}$; б) 4. **471.** а) $a^{\frac{3}{4}}$; б) $x^{\frac{9}{8}}$. **474.** а) $\frac{1}{12}$; б) $-\frac{16}{225}$. **477.** а) $\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)$; б) $\left(b^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{1}{2}}\right)\left(b^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}\right)$. **482.** а) $\frac{\sqrt{a}}{2}$; б) $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3}$. **484.** $\frac{2}{a-1}$. **485.** $\frac{x+3y}{x-y}$. **493.** а) $-3{,}5$; б) $9\frac{1}{3}$; в) 156; г) $\frac{17}{36}$. **503.** а) 5; б) $\frac{25}{16}$. **505.** а) $\frac{1}{4}(a^2+2x-b^2)(a^2+2x+b^2)$. **506.** а) 2; б) $14\frac{2}{7}$. **508.** а) $\pi < \sqrt{2}+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{7}+\sqrt{3} > \sqrt{8}+\sqrt{2}$. **515.** а) $6+18\sqrt{3}$; б) $20\sqrt{2}-40\sqrt{5}$. **519.** а) $2\sqrt{x}+1$; б) -1; в) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; г) $\frac{3\sqrt{m}+28}{m-49}$. **523.** а) Нет корней; б) -9; в) 1,5. **524.** а) $(0; -1)$; б) нет решений. **541.** 1. **547.** а) 0; б) $-4\sqrt[3]{3}$. **548.** а) $\sqrt{x}+x\sqrt{x}$; б) $a+4\sqrt[3]{a}$. **549.** а) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **556.** а) Нет; б) 16; в) 15; г) $\frac{1}{2}$. **557.** а) 1; б) 1. **563.** а) $\frac{4a}{b}$; б) $-a$. **569.** а) 1; б) 0; в) 1,75; г) 0. **570.** а) 1; -2; б) нет корней. **571.** а) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; б) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. **572.** а) -2; б) -3; в) 6; г) -4. **573.** а) На 6 м; б) на 5 лет. **574.** а) 60 м. **575.** $\frac{7}{9}$. **576.** В 1,5 раза. **577.** 16 ч и 5 ч 20 мин. **582.** 89 г меди и 35 г цинка. **583.** 8,685 кг золота и 4,725 кг серебра. **584.** 18 и 4 км/ч. **585.** 10 и 6 км/ч. **586.** 24 рабочих, 14 дней. **587.** 5 ч. **588.** Мотоциклист; а) в 1,25 раза; б) в 2,6 раза. **591.** а) $a_n = n$; б) $a_n = 2n-1$; в) $a_n = 2n$; г) $a_n = \frac{1}{n}$; д) $a_n = (-1)^{n+1}$; е) $a_n = (-1)^n$. **593.** а) 75; б) 3. **594.** б) $12+2n$; $8+2n$; в) $14+2n$. **597.** а) 2; 5; 8; 11; 14. **598.** а) $a_n = 2n+1$; 3; 5; 7; 9; 11; б) $a_n = -5\cdot 2^{n-1}$; -5; -10; -20; -40; -80. **601.** а) $a_1 = 5$; $a_{n+1} = 5 + a_n$. **602.** а) 58. **603.** а) 38. **625.** а) 2; -1; -4; -7. **627.** а) $d = 4$; $a_2 = 1$. **632.** а) Да; $n = 12$; б) нет. **639.** а) 5050; б) 385; б) 500. **640.** а) 210; б) 150. **642.** а) 34; б) 76. **659.** а) 2; б) -54. **660.** а) 21; б) -6; в) 0,8 или $-0{,}8$. **663.** $\frac{1}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{16}{5}$; $\frac{64}{5}$ или $\frac{64}{5}$; $\frac{16}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{5}$. **665.** д) 62; е) $7+3\sqrt{2}$ или $7-3\sqrt{2}$. **670.** а) 252 или 0. **671.** 4. **674.** а) 8; б) $2\frac{2}{3}$; в) $5\frac{5}{9}$; г) $4\frac{6}{11}$. **677.** а) $(\sqrt{2}+1)$ м; б) $(2+\sqrt{3})$ м. **693.** а) 0,3; б) 25. **694.** а) 3; б) -2. **695.** а) $-2{,}5$; б) $-1{,}5$. **697.** $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **698.** а) $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$; б) $\frac{(2n+1)(2n-1)n}{3}$. **705.** б) $3+\sqrt{2}$. **706.** а) Ни при каких; б) при $b \in [-4; 4]$. **707.** а) При $m \geqslant 4$; б) при $m \geqslant 1$; в) при $m \in [-4; 4]$; г) при $m \in [-6; 6]$. **709.** Указание. Границу заштрихованной области покажите пунктирной линией — точки, ей принадлежащие, не удовлетворяют условию задачи. **713.** а) -4; б) -80; в) -22; г) -88. **714.** 16 ран. **715.** а) Через 9 дней; б) через 5 дней; в) через 7 дней; г) через 7 дней. **719.** 170,5. **722.** $n=8$, $a_1=14$, $a_8=-7$. **730.** 1620. **736.** 196 820. **737.** 7168. **739.** 320. **740.** $1023\frac{3}{4}$; $614\frac{1}{4}$. **741.** 5. **742.** 7. **743.** 1535,25; $-512{,}25$. **744.** $1093\frac{13}{27}$. **745.** -3; 3. **747.** 0,125. **748.** 475,6419; 237,6099. **749.** 8. **750.** Девочки; на 8 очков. **751.** 9 участников. **752.** 11 участников. **753.** а) 1 человек; б) 11 человек. **754.** 4. **756.** 130. **757.** а) 5; б) в 4 раза; в) 4. **758.** а) $t=\frac{2yl}{y^2-x^2}$; $l=\frac{t(y^2-x^2)}{2y}$; $x=\sqrt{y-\frac{2yl}{t}}$; $y=l+\sqrt{l^2+tx^2}$; б) 20 мин. **759.** а) 900 м; б) 800 м. **760.** а) 600 м; б) 400 м. **775.** а) $40°+360°\cdot 1$; б) $220°+360°\cdot(-2)$; в) $240°+360°\cdot 1$; г) $180°+360°\cdot(-3)$. **778.** 2π; π; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; 0; б) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$. **779.** а) 360°; 180°; 90°; 270°; 0°; б) 45°; 135°; 225°; 315°. **791.** а) 0; б) 1; в) 1; г) 0; д) 0; е) -1; ж) -1; з) 0; и) 0; к) 1; л) 0; м) 1. **798.** а) 1; 0; б) -1; 0; в) 0; -1; г) 0; -1; д) 0; 1; е) 0; 1. **805.** а) $\sin 40° < \sin 45°$; б) $\cos\frac{\pi}{3}=\cos 60°$. **815.** а) Нет; б) да; в) нет; г) нет; д) да; е) нет. **821.** а) 0; б) $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$; в) 0; г) 2. **833.** а) $\sin\alpha$; б) $-\cos\alpha$; в) $-\sin\alpha$; г) $-\cos\alpha$. **835.** а) 1; б) $\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$; в) $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$; г) 1. **842.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 0; д) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) 1; ж) $\sqrt{3}$; з) не существует. **847.** а) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$; в) $\sin\alpha=-0{,}6$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$. **849.** д) 1; е) $2\cos^2\alpha$; ж) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$; з) $\operatorname{ctg}^4\alpha$. **850.** а) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; б) $\sin\alpha\cos\alpha$; в) $-\cos^2\beta$; г) $\sin^2\alpha$; д) $\frac{2}{\sin\alpha}$; е) $\frac{2}{\cos\beta}$. **852.** а) $-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$; б) $\frac{1}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$. **853.** а) $\sin^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}^2\alpha$. **854.** а) $2\operatorname{tg}^2\alpha$; б) $\cos\alpha-\sin\alpha$. **856.** а) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **857.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$. **859.** а) $-\sin\alpha$; б) $\sqrt{3}\sin\alpha$. **867.** а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **868.** а) 0; б) 0. **869.** а) 1,5; б) 1,5. **870.** а) $-0{,}2$; б) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **874.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **882.** а) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; в) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; г) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. **891.** а) $4\cos 5°\cos 10°\cos 25°$; б) $4\cos 2{,}5°\cos 5°\sin 12{,}5°$. **893.** а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **897.** а) $\operatorname{ctg}\alpha$; б) $-\operatorname{ctg}\alpha$. **906.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{2}$; в) $\frac{5}{4}$; г) $-\frac{1}{4}$. **908.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos 40°$; г) $\cos 2\alpha$. **909.** а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin 80°$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $-\cos 20°$. **913.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **914.** а) $\frac{1}{2}\sin 4\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) 1; г) $-\sin\alpha-\cos\alpha$; д) $\frac{1}{\cos\alpha}$; е) $\cos 2\alpha$; ж) $\frac{2}{\sin 2\alpha}$; з) $\frac{1}{\cos 2\alpha}$; и) $\sin 2\alpha$; к) $\sin 2\alpha$; л) 1; м) 1.

925. а) 1; б) 1; в) $\frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha}$; г) $\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}$. **926.** ж) -1; з) 0. **927.** а) $2 \operatorname{tg} \alpha$; б) $2 \cos \alpha$.

930. а) $\frac{1}{8}$; б) $-\frac{1}{8}$. **934.** а) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$; б) $-\frac{1}{4}$. **935.** а) $\frac{2}{11}$; б) 0,2; в) $20\frac{5}{6}$; г) 5,5; д) 0,05.

936. а) $\frac{1}{x-y}$; б) $\frac{1}{a+2}$. **938.** а) $-\frac{1}{x+4}$; б) $\frac{3}{x+5}$. **950.** а) (2; 3); (3; 2); б) $(0; 2\sqrt{2})$; $(0; -2\sqrt{2})$; $(2\sqrt{2}; 0)$; $(-2\sqrt{2}; 0)$; (2; 2); (−2; −2). **993.** 7 человек, 53 денежные единицы. **994.** 17 человек, 42 пенязя. **995.** 9 человек, 70 денежных единиц. **996.** 126 семей, 3750 денежных единиц. **1009.** 50 км/ч. **1010.** а) 172,5%; б) 185,61%. **1011.** а) Для вкладов на 6 и 3 месяца — $[x]$% и $[y]$% соответственно, где $x = 20\sqrt{p+100} - 200$, $[x]$ — целая часть числа x, $y = 20\sqrt{2[x]+400} - 400$, $[y]$ — целая часть числа y; б) при $p = 150$ — 116% и 102%; при $p = 70$ — 60% и 56%. **1012.** За 1 ч 15 мин. **1013.** а) За 15 дней; б) 10 коров; в) 40 коров. **1014.** 36 быков. **1018.** а) $15 - 10n$; б) $3n - 6$; в) $3n + 3$; г) $-n$. **1020.** а) $b_1 = \frac{1}{2}$; $q = -\frac{1}{2}$; б) $b_1 = 1$; $q = 3$. **1021.** 12; 16; 20; 25 и 24,75; 20,25; 15,75; 12,25. **1022.** 8; 10; 12 или 17; 10; 3. **1023.** 10. **1024.** 55. **1027.** а) 3; б) 5. **1028.** $-120°$. **1029.** а) $-30°$; б) $-90°$; в) $-270°$; г) $-360°$; д) $-1200°$; е) $-4320°$. **1030.** а) $-60°$; б) $432°$. **1031.** $630°$. **1032.** а) $-1350°$; б) $2700°$. **1043.** а) 7; б) -13. **1049.** а) 1; б) 1. **1063.** а) Да; б) нет; в) знак «$\leq$»: $a \leq |a|$.

1078. а) 0,3; б) 0,001; в) 0,03; г) 2. **1079.** а) $\frac{1}{35}$; б) $\frac{1}{14}$; в) $\frac{3}{350}$; г) $\frac{1}{700}$. **1086.** а) 3 и $\frac{3}{127}$; б) 3 и $\frac{3}{17}$; в) 0,2 и $\frac{1}{8}$; г) 0,02 и $\frac{1}{6}$; д) 0,005 и $\frac{1}{37}$; е) 0,00016 и $\frac{1}{6274}$. **1087.** а) $0{,}48 \approx 0{,}5$; $|0{,}48 - 0{,}5| = 0{,}02$; $\frac{0{,}02}{0{,}48} = \frac{1}{24}$; г) $-0{,}51 \approx -0{,}5$; $|-0{,}51 - (-0{,}5)| = 0{,}01$; $\frac{0{,}01}{|-0{,}51|} = \frac{1}{51}$.

1088. а) $\frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = \frac{1}{20}$; б) $\frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = \frac{1}{20}$; в) $\frac{1}{2} \cdot 10^{0} = \frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2} \cdot 10^{0} = \frac{1}{2}$.

1089. $71\,523 \approx 71\,500$ с точностью до $\frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = \frac{1}{200}$. **1091.** а) $a \approx 2{,}380 \cdot 10^7$; $b \approx 1{,}000 \cdot 10$; $c \approx 2{,}380 \cdot 10^{-3}$; б) $a \approx 2{,}381 \cdot 10^7$; $b \approx 1{,}000 \cdot 10$; $c \approx 2{,}381 \cdot 10^{-3}$. **1093.** а) 0,505; б) 2; в) $1{,}5 \cdot 10^{-3}$. **1097.** Если задать четыре данных числа с точностью до 0,01, то число 10,63 будет приближением суммы этих четырех чисел с точностью до 0,1. **1098.** 0,01. **1101.** а) 0,34291. **1104.** а) 0,05684. **1112.** а) Например, 0,01; б) например, 2,1345. **1115.** а) 0; б) -2. **1117.** а) $1\frac{501}{1001}$; б) $4\frac{519}{1003}$. **1118.** 252; 2,52; 0,252. **1120.** Нет.

Ответы к заданиям для самоконтроля

1. 1) $-\frac{1}{9}$; 2) $\frac{x^2+2x}{x-2}$; 4) 7 и -5. **2.** 1) 5,75; 2) $\frac{2x(x+3)}{3(x-3)}$; 4) -5 и -4; 4 и 5. **3.** 1) $-0{,}25$; 2) $\frac{1-x}{1+x}$; 4) 8 дм и 0,5 дм. **4.** 1) 10; 2) $\frac{3-a}{3+a}$; 4) 3,5 м и 0,5 м. **5.** 1) 1; 2) $\frac{3m^2+16}{m+4}$; 3) (1,5; 3,5); 4) (1; −1); (4; 2). **6.** 1) 16; 2) $\frac{4x^2+2}{x+1}$; 3) (2, −2); 4) (2; 2); (6; −2). **7.** 1) $-0{,}5$;

2) $\frac{x+y}{x-y}$; 3) $(-1; 2)$; 4) за 20 дней. **8.** 1) $7\frac{9}{11}$; 2) $\frac{2(a+1)}{a-1}$; 3) $(2; -3)$; 4) 1,3 ч. **9.** 1) $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-5\frac{3}{4}$; 3; 4) $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8}$. **10.** 2) $64\sqrt[3]{4}$; 3) $\frac{12}{a}$; 4) 0; 5. **11.** 1) 70 км/ч и 80 км/ч; 2) -2; $1\frac{1}{3}$; 3) $(-\infty; 0)\cup(4; +\infty)$. **12.** 1) $-\frac{32}{13}$; 2; 2) $(-1; 8)$; 3) нет корней; 4) первое число меньше второго. **13.** 1) $-2\frac{7}{400}$; 2) $\frac{1}{2x-2}$; 4) 5 и 6. **14.** 1) $-8\frac{3}{4}$; 2) $\frac{a}{a^2-4}$; 4) 7 и -1. **15.** 1) 30; 2) $\frac{1}{4}$; 4) 7 и 0,5; $-0,5$ и -7. **16.** 1) 0,38; 2) 1; 4) 1,5 и $-8,2$; 8,2 и $-1,5$. **17.** 1) $\frac{3}{64}$; 3) 177; 4) $(-4; 2)$; $(4; -2)$. **18.** 1) $(-3; 4)$; $(4; -3)$; 2) $d = -\frac{3}{19}$; 3) $(-\infty; -1)\cup(-1; +\infty)$; 4) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$. **19.** 1) $a_{10} = 7,6$; 2) $x + \sqrt{x}$; 3) 2; 5; 4) $(-\infty; 0]\cup]5; +\infty)$.

20. 1) $d = 2,5$; 29 является членом данной арифметической прогрессии; 2) $1+c^{\frac{1}{3}}$; 3) $(-\infty; 2]\cup]3; +\infty)$; 4) $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -2,4$. **21.** 1) $a_1 = 2$; $d = 1,2$; 2) -5; -1; 3; 3) $(-\infty; 0)\cup\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; 4) 0. **22.** 1) 48 км/ч и 60 км/ч; 2) $\frac{5-\sqrt{13}}{2}$; $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$; 3) $\left(1\frac{1}{2}; 1\frac{2}{3}\right)$; 4) 0. **23.** 1) $a_{11} = 50$; $S_{11} = 330$; 2) $(-7; 7)$; 3) $(1; -1)$; 4) -3; $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3.

24. 1) $S_6 = 7\frac{7}{8}$; 2) $(-\infty; 0)\cup\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 3) $(1; 0)$; 4) $0,7^{-5} > 0,7^0$. **25.** 1) $S_7 = 381$; 2) -1; 4; 3) нет решений; 4) $-\sqrt{3}$. **20.** 1) За 10 ч и 15 ч; 2) $3-\sqrt{21}$; $3-\sqrt{3}$; $3+\sqrt{3}$; $3+\sqrt{21}$; 3) $(1; 5)$; 4) $8^{1,2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$. **27.** 1) 24; 2) -2; 3; 3) $(-\infty; -7)\cup(0; 5)$; 4) -1. **28.** 1) $-\frac{1}{4}$; 7; 2) $\left(1\frac{1}{2}; 2\frac{1}{3}\right)$; 3) -1; 1; 4) второе выражение больше первого. **20.** 1) 50 км/ч; 2) -3; -1; 1; 3; 3) $(-80; +\infty)$; 4) $[2; 10]$. **30.** 1) -3; -2; 2; 3; 2) $(-\infty; 0)\cup(0,5; +\infty)$; 3) $-\frac{1}{40}$; 4) -2; 3.

31. 1) 40; 2) $(0; 0)$ — точка пересечения графика функции $y = \sqrt{x}$ с осями координат; 3) $(-\infty; -1)\cup[2; +\infty)$; 4) $(1; -1)$. **32.** 1) $-10-16\sqrt{5}$; 2) -3; $\frac{2}{3}$; 3) 15 палаток и 10 домиков; 4) 2 решения. **33.** 1) 1; 2) $[-3; 3]$, 2 — одно из решений неравенства; 3) в первом зале 20 мест в ряду, а во втором — 30; 4) $(1; -3)$, $(-3; 1)$. **34.** 1) $-0,16$; 2) $\frac{14}{25}$; 4) $(0,6; -0,2)$, $\left(-\frac{17}{5}; -\frac{43}{15}\right)$. **35.** 1) -2; 2) 15 мин и 20 мин; 3) $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$; 4) $\left(1; \frac{3}{2}\right)$, $(-2; -3)$. **36.** 1) -4; 0,4; 2) $-\frac{0,88}{x-0,3} - 0,6$ при условии $x \neq 1$; выражение принимает все значения из множества $\left(-\infty; -\frac{13}{7}\right)\cup\left(-\frac{13}{7}; -0,6\right)\cup(-0,6; +\infty)$; 3) 16 и -16; 4) -2; 0. **37.** 1) 2; 2) 5; 3) $\frac{1}{4}$; 4) на 35%.

ПОСЛЕСЛОВИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Для повышения уровня математического образования в стране, совершенствования школьных учебников по инициативе ректора Московского университета академика В. А. Садовничего разработана Программа «МГУ — школе» и началось издание учебников для 5—11 классов, сохраняющих и развивающих лучшие традиции отечественного математического образования.

Учебник «Алгебра, 9» продолжает серию учебников «МГУ — школе» авторов С. М. Никольского, М. К. Потапова, Н. Н. Решетникова, А. В. Шевкина. Этот учебник предназначен для общеобразовательных классов, в которых дополнительные материалы и сложные задачи можно не рассматривать. Если же имеется достаточно часов, если класс проявляет интерес к математике, то за счет *дополнений* в конце глав учебника, а также пунктов и отдельных задач со звездочкой, необязательных в обычных общеобразовательных классах, можно расширить и углубить содержание изучаемого материала до объема, предусмотренного программой для классов с углубленным изучением математики. То есть учебник можно использовать как в обычных, так и в классах с углубленным изучением математики.

Авторы учебников серии «МГУ — школе» считают принципиально важным вести обучение школьников в рамках общеобразовательной программы и программы с углубленным изучением математики по одним и тем же учебникам, начиная с 7 класса. Тогда переход с одной программы обучения на другую не будет вызывать трудностей ни для учащихся, ни для учителей. Кроме того, учащиеся, заинтересованные в более глубоком изучении математики и не обучающиеся в спецклассах, получают реальную возможность углублять свои познания в математике самостоятельно или под руководством учителя, а учителя — реальную возможность для организации дифференцированного обучения.

Учебник «Алгебра, 9» включает пять глав: I. Неравенства, II. Степень числа, III. Последовательности, IV. Тригонометрические формулы, V. Приближенные вычисления.

Каждая глава завершается историческими сведениями и дополнениями, содержащими необязательный материал, не входящий в программу для общеобразовательных классов, а также задания для повторения.

Первая глава начинается изучением неравенств первой степени с одним неизвестным ($kx + b > 0$, $kx + b < 0$, $k \neq 0$). Решение таких неравенств основывается на свойствах числовых неравенств и иллюстрируется с помощью графиков линейных функций. Затем вводятся понятия линейного неравенства, системы линейных неравенств и рассматриваются приемы их решения.

Затем изучаются неравенства второй степени с одним неизвестным, вводится понятие его дискриминанта D, последовательно рассматриваются случаи $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$. Решение неравенств основано на определении знака квадратного трехчлена на интервалах и иллюстрируется схематическим построением графиков квадратичных функций.

При решении рациональных неравенств используется метод интервалов, который по сути применялся уже при решении квадратных неравенств. Показывается равносильность неравенств вида $\frac{A}{B} > 0$ и $\frac{A}{B} < 0$ неравенствам $A \cdot B > 0$ и $A \cdot B < 0$ соответственно, где A и B — многочлены. Однако переходить каждый раз к произведению не рекомендуется, так как после изучения нестрогих неравенств такой переход может приводить к ошибкам.

После изучения строгих неравенств: линейных, квадратных, рациональных — рассматриваются нестрогие неравенства всех ранее изученных типов и их системы.

В классах с углубленным изучением математики дополнительно рассматриваются темы:

Доказательство числовых неравенств,

Производные линейной и квадратичной функций.

При изучении дополнительных вопросов на небольшом числе примеров формируются представления о производной линейной и квадратичной функций и первообразной линейной функции, решаются задачи, обеспечивающие потребности физики при изучении равномерного и равноускоренного движений; демонстрируются различные способы доказательства неравенств.

В результате изучения главы I учащиеся должны научиться решать линейные неравенства, неравенства второй степени с одним неизвестным, рациональные неравенства и системы таких неравенств.

Глава II начинается изучением свойств функции $y = x^n$ и ее графика. Затем изучаются корень степени n, арифметический корень и свойства корней степени n. При работе по первому варианту планирования (в обычных классах) особое внимание следует уделить функциям $y = x^2$, $y = x^3$, а также изучению свойств арифметического корня степени n (на примере $n=2$ и $n=3$) и их применению к преобразованию выражений.

В классах с углубленным изучением математики дополнительно рассматриваются темы:

Функция $y = \sqrt[n]{x}\ (x \geqslant 0)$,

Степень с рациональным показателем и ее свойства.

Следует иметь в виду, что по программе для классов (школ) с углубленным изучением математики степень с рациональным показателем изучается с опережением, но уже сейчас учащиеся могут освоить свойства степеней с рациональными показателями и их применение в преобразовании числовых и буквенных выражений.

В результате изучения главы II учащиеся должны изучить свойства функций $y = x^n$ (на примере $n = 2$ и $n = 3$) и их графики, свойства корня степени n, выработать умение преобразовывать выражения, содержащие корни степени n.

При изучении главы III вводятся понятия числовой последовательности, арифметической и геометрической прогрессий, решаются традиционные задачи, связанные с формулами n-го члена и суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий.

В классах с углубленным изучением математики дополнительно рассматриваются темы:

Свойства числовых последовательностей,

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия,

Метод математической индукции.

При изучении дополнительных вопросов расширяются представления о последовательностях и их свойствах, показывается важный способ доказательства утверждений в математике — метод математической индукции, в том числе для арифметической и геометрической прогрессий.

В результате изучения главы III учащиеся должны научиться решать задачи, связанные с арифметической и геометрической прогрессиями.

Изложение материала главы IV опирается на определения и некоторые факты из геометрии, при этом все тригонометрические формулы доказываются. Термины «тригонометрические функции» и «формулы приведения» в учебнике не используются, так как тригонометрические функции не являются предметом изучения. Однако для облегчения запоминания формул приведения учитель может использовать известное мнемоническое правило.

В обычных классах материал данной главы в соответствии с письмом Министерства образования РФ может не изучаться, поэтому он не выносится на итоговый контроль. Этот материал можно изучить ознакомительно. Но в программу для классов с углубленным изучением математики тригонометрия входит в прежнем объеме. Здесь дополнительно изучаются:

Косинус и синус разности и суммы двух углов,

Формулы для дополнительных углов,

Сумма и разность синусов и косинусов,

Формулы для двойных и половинных углов,

Произведение синусов и косинусов.

При изучении дополнительных вопросов в классах с углубленным изучением математики происходит опережение по сравнению с обычными классами, и к этому вопросу можно будет вернуться в 10 классе, но уже сейчас учащиеся могут освоить применение формул тригонометрии для преобразования тригонометрических выражений.

В результате изучения главы IV учащиеся должны освоить понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла, научиться решать связанные с ними вычислительные задачи и выполнять тождественные преобразования простейших тригонометрических выражений.

При изучении главы V вводятся понятия абсолютной и относительной погрешностей приближения.

В классах с углубленным изучением математики показываются приемы оценки результатов вычислений при сложении, вычитании, умножении, делении.

В результате изучения главы V учащиеся должны освоить понятия абсолютной и относительной погрешностей приближения, выработать умение выполнять оценку результатов вычислений.

Особое внимание следует уделить организации обобщающего повторения изученного в 7—9 классах перед проведением письменного экзамена. При организации этой работы учитель может воспользоваться Заданиями для самоконтроля из учебника и известными экзаменационными сборниками.

Ниже приведены три варианта примерного тематического планирования. **I вариант** — для работы при 102 ч, **II вариант** — при 136 ч и **III вариант** — для работы в классах с углубленным изучением математики (170 ч).

9 класс

I вариант: 3 ч в неделю, всего 102 ч

§ 1. Линейные неравенства с одним неизвестным (8).

1.1. Неравенства первой степени с одним неизвестным (2).

1.2. Применение графиков к решению неравенств первой степени с одним неизвестным (1).

1.3. Линейные неравенства с одним неизвестным (2).

1.4. Системы линейных неравенств с одним неизвестным (3).

§ 2. Неравенства второй степени с одним неизвестным (10).
2.1. Понятие неравенства второй степени с одним неизвестным (1).
2.2. Неравенства второй степени с положительным дискриминантом (3).
2.3. Неравенства второй степени с дискриминантом, равным нулю (2).
2.4. Неравенства второй степени с отрицательным дискриминантом (1).
2.5. Неравенства, сводящиеся к неравенствам второй степени (2).
Контрольная работа № 1 (1).
§ 3. Рациональные неравенства (12).
3.1. Метод интервалов (3).
3.2. Решение рациональных неравенств (3).
3.3. Системы рациональных неравенств (2).
3.4. Нестрогие рациональные неравенства (3).
Контрольная работа № 2 (1).
Доказательство числовых неравенств.*
Производные линейной и квадратичной функций.*
§ 4. Корень степени n (17).
4.1. Свойства функции $y = x^n$ (2).
4.2. График функции $y = x^n$ (2).
4.3. Понятие корня степени n (2).
4.4. Корни четной и нечетной степеней (3).
4.5. Арифметический корень (2).
4.6. Свойства корней степени n (3).
4.7. Корень степени n из натурального числа (2).
4.8.**Функция* $y = \sqrt[n]{x}$ $(x>0)$.
Контрольная работа № 3 (1).
Понятие степени с рациональным показателем.*
Свойства степени с рациональным показателем.*
§ 5. Числовые последовательности и их свойства (2).
5.1. Понятие числовой последовательности (2).
5.2.* *Свойства числовых последовательностей.*
§ 6. Арифметическая прогрессия (7).
6.1. Понятие арифметической прогрессии (3).
6.2. Суммы n первых членов арифметической прогрессии (3).
Контрольная работа № 4 (1).
§ 7. Геометрическая прогрессия (7).
7.1. Понятие геометрической прогрессии (3).
7.2. Суммы n первых членов геометрической прогрессии (3).
7.3*. *Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.*
Контрольная работа № 5 (1).
Метод математической индукции.*
§ 8. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла (13).
8.1. Понятие угла (2).
8.2. Радианная мера угла (2).
8.3. Определение синуса и косинуса угла (3).
8.4. Основные формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ (3).
8.5. Тангенс и котангенс угла (2).
Контрольная работа № 6 (1).
Косинус разности и косинус суммы двух углов.*

*Формулы для дополнительных углов**.*
*Синус суммы и синус разности двух углов**.*
*Сумма и разность синусов и косинусов**.*
*Формулы для двойных и половинных углов**.*
*Произведение синусов и косинусов**.*
§ 9. Приближения чисел (5).
9.1. Абсолютная величина числа (1).
9.2. Абсолютная погрешность приближения (2).
9.3. Относительная погрешность приближения (2).
*Абсолютная погрешность приближения суммы и разности двух чисел**.*
*Абсолютная погрешность приближения суммы нескольких слагаемых**.*
*Приближение произведения**.*
*Приближение частного**.*
*Приближенные вычисления с калькулятором**.*
Повторение (21).
Повторение курса алгебры 7—9 классов (16).
Контрольная работа № 7[1] (2).
Итоговая контрольная работа № 8 (3).

II вариант: 4 ч в неделю, всего 136 ч

1. **Линейные неравенства с одним неизвестным (13 ч).**
2. **Неравенства второй степени с одним неизвестным (14 ч).**
3. **Рациональные неравенства (17 ч).**
4. **Корень степени *n* (18 ч).**
5. **Числовые последовательности и их свойства, арифметическая и геометрическая прогрессии (17 ч).**
6. **Синус, косинус, тангенс и котангенс угла (17 ч).**
7. **Формулы сложения (15 ч).**
8. **Приближения чисел (10 ч).**
9. **Повторение (15 ч).**

III вариант: 5 ч в неделю, всего 170 ч

1. **Линейные неравенства с одним неизвестным (13 ч).**
2. **Неравенства второй степени с одним неизвестным (14 ч).**
3. **Рациональные неравенства (22 ч).**
4. **Корень степени *n* (22 ч).**
5. **Числовые последовательности и их свойства, арифметическая и геометрическая прогрессии (23 ч).**
6. **Синус, косинус, тангенс и котангенс угла (17 ч).**
7. **Формулы сложения (17 ч).**
8. **Приближения чисел (10 ч).**
9. **Повторение (15 ч).**

Резерв. Решение задач (17 ч).

[1] Контрольные работы № 7 и № 8 (по повторению) составляются учителем по текстам экзаменационных работ прошлых лет.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава V. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 9. Приближения чисел

Дополнения к главе V

Учебное издание

Никольский Сергей Михайлович
Потапов Михаил Константинович
Решетников Николай Николаевич
Шевкин Александр Владимирович

АЛГЕБРА

Учебник для 9 класса
общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редакторы *Н. Е. Терехина, Т. Г. Войлокова*
Младший редактор *Н. В. Сидельковская*
Художник *В. А. Андрианов*
Художественный редактор *Е. Р. Дашук*
Художественная графика *И. А. Шалеев*
Технические редакторы *С. С. Якушкина, Т. Е. Хотюн*
Корректоры *Н. В. Бурдина, О. В. Ивашкина*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с диапозитивов 21.10.05. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офс. Гарнитура Литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 16 + 0,38 форз. Усл. кр.-отт. 17,12. Уч.-изд. л. 14,19 + 0,48 форз. Тираж 19500 экз. Заказ № 7076.

Федеральное государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени «Издательство «Просвещение» Федерального агентства по печати и массовым коммуникациям. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «Московские учебники и Картолитография». 125252, Москва, ул. Зорге, 15.